Zur Vielfachstreuung an kleinen Kugeln

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

genehmigt

von der Philosophischen Fakultät der
Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

von

Walter Trinks
aus Muskau, Oberlausitz

Tag der mündlichen Prüfung: 31. Januar 1935
Tag der Promotion: 10. Mai 1935

1 9 3 5

Johann Ambrosius Barth in Leipzig

76

Referenten:

Dr. Möglich

Professor Dr. von Laue

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderdruck aus „Annalen der Physik“ 5. Folge, Band 22, Heft 6. 1935
Printed in Germany

Die Frage nach den Farben kolloidaler Lösungen ist bereits von Mie[1]) in recht zufriedenstellender Weise beantwortet worden. Jedoch ging er von der Voraussetzung schwacher Konzentrationen aus, welche die Vernachlässigung der Wechselwirkung benachbarter Teilchen zuläßt. Diese Annahme wird jedoch nicht immer zutreffend sein. Von einer gewissen Dichte der kolloidalen Teilchen ab wird der an einem Teilchen einfallende Lichtzustand erheblich von dem einer ebenen Welle abweichen. Damit ist eine Änderung der von Mie gefundenen Frequenzabhängigkeit der Streuintensität zu erwarten, wie sie Möglich bereits für ein einfallendes, konvergentes Lichtbündel nachgewiesen hat[2]). Tatsächlich weichen ja die Farben stärker konzentrierter kolloidaler Lösungen wesentlich von den Mieschen Ergebnissen ab.

Es ist nun die Aufgabe der vorliegenden Arbeit, zu untersuchen, wie sich die Streuintensität eines kolloidalen Kügelchens ändert, wenn noch ein zweites solches Teilchen in seine unmittelbare Nähe rückt, wenn also der sich einstellende Lichtzustand die elektromagnetischen Grenzbedingungen an der Oberfläche nicht nur einer sondern zweier kleiner Kugeln zu erfüllen hat. Es erweist sich dazu als notwendig, ein und dasselbe elektromagnetische Feld in den Koordinaten zweier verschiedener Polarkoordinatensysteme zu beschreiben, den beiden nämlich, deren Ausgangspunkte in den Mittelpunkten der beiden streuenden Teilchen liegen. Diese Teilaufgabe, welche die Hauptschwierigkeit der vorliegenden Untersuchungen bildet, ist in § 3 und § 4 gelöst worden, nachdem in § 2 der Lösungsweg kurz skizziert ist und in § 1 eine Übersicht über die Lösung gegeben ist für den Fall, daß nur ein streuendes Teilchen vorliegt. In § 5 ist das rechnerische Ergebnis in einigen speziellen Fällen diskutiert. Es zeigt sich, daß sehr wesentliche Änderungen des Mieschen Ergebnisses eintreten, wenn die Teilchen unmittelbar

1) G. Mie, Ann. d. Phys. **25**. S. 377. 1908.
2) F. Möglich, Ann. d. Phys [5] **17**. S. 825. 1933.

benachbart sind, während diese Änderungen bereits zu vernachlässigen sind, wenn der Teilchenabstand zwei bis drei Teilchendurchmesser übersteigt. Schließlich ergibt sich noch, daß die Untersuchung des allgemeinen Falles beliebig vieler Teilchen keine besonderen mathematischen Schwierigkeiten mehr mit sich bringt, sondern nur noch eine Sache der numerischen Rechnung ist.

§ 1. Das elektromagnetische Feld einer Lichtwelle in Polarkoordinaten und die Erfüllung der Grenzbedingungen an der Oberfläche einer Kugel[1])

Das durch seine Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in Polarkoordinaten r, ϑ, φ gegebene elektromagnetische Feld einer Lichtwelle läßt sich in zwei Teilfelder $\mathfrak{E}^{(1)}, \mathfrak{H}^{(1)}$ und $\mathfrak{E}^{(2)}, \mathfrak{H}^{(2)}$ aufspalten, von denen jedes aus einem skalaren Potential abgeleitet werden kann, dem „elektrischen" Potential Π^E und dem „magnetischen" Potential Π^H. Die Feldstärkekomponenten der Teilfelder sind mit den Potentialen durch die folgenden Beziehungen verknüpft:

$$
(1)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\mathfrak{E}_r^{(1)} = \dfrac{\partial^2 r\,\Pi^E}{\partial r^2} + k^2 r\,\Pi^E, & \mathfrak{H}_r^{(2)} = \dfrac{\partial^2 r\,\Pi^H}{\partial r^2} + k^2 r\,\Pi^H,\\
\mathfrak{E}_\vartheta^{(1)} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 r\,\Pi^E}{\partial r\,\partial \vartheta}, & \mathfrak{H}_\vartheta^{(2)} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 r\,\Pi^H}{\partial r\,\partial \vartheta},\\
\mathfrak{E}_\varphi^{(1)} = \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial^2 r\,\Pi^E}{\partial r\,\partial \varphi}, & \mathfrak{H}_\varphi^{(2)} = \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial^2 r\,\Pi^H}{\partial r\,\partial \vartheta},\\
\mathfrak{H}_r^{(1)} = 0, & \mathfrak{E}_r^{(2)} = 0,\\
\mathfrak{H}_\vartheta^{(1)} = \dfrac{\sigma + i\varepsilon\omega}{c}\dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial r\,\Pi^E}{\partial \varphi}, & \mathfrak{E}_\vartheta^{(2)} = -\dfrac{i\omega}{c}\dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial r\,\Pi^H}{\partial \varphi},\\
\mathfrak{H}_\varphi^{(1)} = -\dfrac{\sigma + i\varepsilon\omega}{c}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r\,\Pi^E}{\partial \vartheta}, & \mathfrak{E}_\varphi^{(2)} = \dfrac{i\omega}{c}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r\,\Pi^H}{\partial \vartheta},
\end{array}\right.
$$

wobei $k^2 = -\dfrac{i\omega}{c}\cdot\dfrac{\sigma + i\varepsilon\omega}{c}$ ist. Beide Potentiale genügen der Differentialgleichung:

$$(2)\qquad \Delta\Pi + k^2\Pi = 0.$$

Der Ansatz $\Pi = R(r)\cdot\Theta(\vartheta)\cdot\Phi(\varphi)$ führt auf die folgenden linearen Differentialgleichungen:

$$(3a)\qquad \frac{d^2 rR}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{\alpha}{r^2}\right) rR = 0,$$

$$(3b)\qquad \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) + \left(\alpha - \frac{\beta}{\sin^2\vartheta}\right)\Theta = 0,$$

$$(3c)\qquad \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \beta\Phi = 0.$$

1) Vgl. Handb. d. phys. Optik I_2, S. 646, Verlag J. A. Barth, Leipzig.

Als zwei linear unabhängige Integrale von (3a) ergeben sich die Besselschen Funktionen:

$$rR = \sqrt{kr}\, J_{n+\frac{1}{2}}(kr), \quad rR = \sqrt{kr}\, J_{-n-\frac{1}{2}}(kr).$$

Es erweist sich jedoch in dem vorliegenden Problem der Beugung an kugelförmigen Teilchen als vorteilhaft, ein anderes Fundamentalsystem einzuführen, nämlich:

$$(4)\quad \begin{cases} rR = \psi_n(kr) = \left(\dfrac{\pi \cdot k \cdot r}{2}\right)^{1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(kr), \\ rR = \Psi_n(kr) = \left(\dfrac{\pi\, kr}{2}\right)^{1/2}\left[J_{n+\frac{1}{2}}(kr) - e^{i\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi} J_{-n-\frac{1}{2}}(kr)\right], \end{cases}$$

wobei

$$(5)\qquad J_\nu(x) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} (-1)^\varkappa \frac{x^{\nu+2\varkappa}}{2^{\nu+2\varkappa}\,\varkappa!\,\Gamma(\nu+\varkappa+1)}.$$

Die Integrale von (3b) sind die Kugelfunktionen und ihre Zugeordneten:

$$(6)\quad \begin{cases} P_n^m(y) = \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot n(n-1)\cdots(n-m+1)(1-y^2)^{\frac{m}{2}} \\ \quad \cdot\left\{y^{n-m} - \dfrac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)}\, y^{n-m-2}\right. \\ \quad + \dfrac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}\, y^{n-m-4} \\ \quad \left. - \cdots + \cdots\right\}. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung (3c) hat schließlich die trigonometrischen Funktionen $\sin m\varphi$, $\cos m\varphi$ zu Integralen. Als spezielle Integrale der Differentialgleichung (2) ergeben sich demnach die Produkte:

$$\frac{\psi_n(kr)}{kr} P_n^m(\cos\vartheta) \begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{matrix}, \qquad \frac{\Psi_n(kr)}{kr} P_n^m(\cos\vartheta) \begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{matrix}.$$

Die allgemeinen Integrale lassen sich als Summen solcher Produkte darstellen:

$$(7\,a)\quad \begin{cases} \Pi^e = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left\{\frac{\psi_n(kr)}{kr} P_n^m(\cos\vartheta)[e_{n,m}\cos m\varphi + \bar{e}_{n,m}\sin m\varphi]\right. \\ \quad \left. + \dfrac{\Psi_n(kr)}{kr} P_n^m(\cos\vartheta)[E_{n,m}\cos m\varphi + \bar{E}_{n,m}\sin m\varphi]\right\}, \end{cases}$$

$$7\,b)\quad \begin{cases} \Pi^h = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{n,m}\left\{\frac{\psi_n(kr)}{kr} P_n^m(\cos\vartheta)[h_{n,m}\cos m\varphi + \bar{h}_{n,m}\sin m\varphi]\right. \\ \quad \left. + \dfrac{\Psi_n(kr)}{kr} P_n^m(\cos\vartheta)[H_{n,m}\cos m\varphi + \bar{H}_{n,m}\sin m\varphi]\right\}. \end{cases}$$

Verlangt man, daß die Feldstärken für $r = 0$ endlich bleiben, so fallen die Summanden mit den Funktionen $\frac{\Psi_n(kr)}{kr}$ fort, da diese im Nullpunkt einen Pol haben. Damit ist der an einer Kugel einfallende Lichtzustand durch folgende beiden Potentiale gegeben:

$$(8)\quad \begin{cases} \Pi^e = \frac{1}{k} \sum\limits_{n,m} \frac{\psi_n(kr)}{kr} P_n^m(\cos\vartheta)[e_{n,m}\cos m\varphi + \bar{e}_{n,m}\sin m\varphi], \\ \Pi^h = \frac{1}{k} \sum\limits_{n,m} \frac{\psi_n(kr)}{kr} P_n^m(\cos\vartheta)[h_{n,m}\cos m\varphi + \bar{h}_{n,m}\sin m\varphi]. \end{cases}$$

Die elektromagnetischen Grenzbedingungen an der Oberfläche der Kugel verlangen dann, daß zu diesem einfallenden Felde ein Streufeld mit folgenden Potentialen tritt:

$$(9)\quad \begin{cases} \Pi^E = \frac{1}{k} \sum\limits_{n,m} \frac{\Psi_n(kr)}{kr} P_n^m(\cos\vartheta)[E_{n,m}\cos m\varphi + \bar{E}_{n,m}\sin m\varphi], \\ \Pi^H = \frac{1}{k} \sum\limits_{n,m} \frac{\Psi_n(kr)}{kr} P_n^m(\cos\vartheta)[H_{n,m}\cos m\varphi + \bar{H}_{n,m}\sin m\varphi], \end{cases}$$

wobei

$$(10)\quad \begin{cases} E_{n,m} = C_n e_{n,m}, & H_{n,m} = D_n h_{n,m} \\ \bar{E}_{n,m} = C_n \bar{e}_{n,m}, & \bar{H}_{n,m} = D_n \bar{h}_{n,m} \end{cases}$$

ist, mit

$$C_n = -\frac{\alpha\,\psi_n(\alpha)\,\psi_n'(\beta) - \beta\,\psi_n(\beta)\,\psi_n'(\alpha)}{\alpha\,\Psi_n(\alpha)\,\psi_n'(\beta) - \beta\,\Psi_n'(\beta)\,\psi_n(\alpha)},$$

$$D_n = \frac{\psi_n(\alpha)[\beta\,\psi_n(\beta)]' - \psi_n(\beta)[\alpha\,\psi_n(\alpha)]'}{\Psi_n(\alpha)[\beta\,\psi_n(\beta)]' - \psi_n(\beta)[\alpha\,\Psi_n(\alpha)]'}.$$

Hierin bedeuten $\alpha = k \cdot a$, $\beta = k_i \cdot a$, wenn a der Kugelradius und k_i die k entsprechende Größe im Innern der Kugel ist.

Für den Fall sehr kleiner Kugeldurchmesser ($2a < 0{,}1\ \mu$) findet Mie, daß nur C_1 wesentlich von Null verschieden ist, während alle übrigen C_n und sämtliche D_n gleich Null gesetzt werden können. Für diesen Fall, auf den sich auch die vorliegende Arbeit beschränkt, gehen die Gl. (9) für die Streupotentiale über in:

$$(11)\quad \begin{cases} \Pi^E \approx \frac{1}{k} \frac{\Psi_1(kr)}{kr} (E_{10} P_1(\cos\vartheta) + P_1^1(\cos\vartheta)[E_{11}\cos\varphi + \bar{E}_{11}\sin\varphi]), \\ \Pi^H \approx 0. \end{cases}$$

§ 2. Aufgabe und Lösungsweg

Es ist die Aufgabe der vorliegenden Arbeit festzustellen, wie sich das von einem kolloidalen, kugelförmigen Teilchen $\mathfrak{K}_1$ durch eine ebene Lichtwelle verursachte Streufeld ändert, dadurch, daß noch ein zweites solches Teilchen $\mathfrak{K}_2$ in die unmittelbare Nähe des ersten rückt. Zur Lösung dieser Aufgabe sei das Streufeld $\mathfrak{S}_1$ des

Teilchens $\mathfrak{K}_1$ durch seine Potentiale in der Form der Gl. (11) gegeben, und zwar in Polarkoordinaten $r_1, \vartheta_1, \varphi_1$ mit dem Mittelpunkt von $\mathfrak{K}_1$ als Ursprung. Ebenso sei das Streufeld $\mathfrak{S}_2$ des Teilchens $\mathfrak{K}_2$ durch seine Potentiale in Polarkoordinaten $r_2, \vartheta_2, \varphi_2$ um den Mittelpunkt von $\mathfrak{K}_2$ gegeben. Aus dem Streufelde $\mathfrak{S}_2$ und dem Felde der einfallenden ebenen Welle sind nun die Potentiale des bei $\mathfrak{K}_1$ einfallenden Feldes in Koordinaten $r_1, \vartheta_1, \varphi_1$ zu berechnen. Dann sind nämlich die Grenzbedingungen an der Oberfläche von $\mathfrak{K}_1$ anwendbar und liefern ein System von Beziehungen zwischen den Streuintensitäten von $\mathfrak{S}_1$ und denen von $\mathfrak{S}_2$. Entsprechend sind aus $\mathfrak{S}_1$ und dem Felde der ebenen Welle die Potentiale des bei $\mathfrak{K}_2$ einfallenden Feldes in Koordinaten $r_2, \vartheta_2, \varphi_2$ zu berechnen. Die Grenzbedingungen an der Oberfläche von $\mathfrak{K}_2$ liefern ein zweites Gleichungensystem zwischen den Streuintensitäten von $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$. Aus beiden Systemen von Gleichungen sind diese Intensitäten zu berechnen.

Die Hauptschwierigkeit liegt darin, aus den Potentialen z. B. des Streufeldes $\mathfrak{S}_2$ in $r_2, \vartheta_2, \varphi_2$ die Potentiale desselben Feldes aber in Koordinaten $r_1, \vartheta_1, \varphi_1$ auszudrücken. Diese Teilaufgabe vereinfacht sich wesentlich, wenn man die Polarkoordinatensysteme um die beiden Teilchenmittelpunkte so wählt, daß sie in der Polarachse und in der Halbebene $\varphi = 0$ übereinstimmen. Mit $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ sind dann die Feldstärkekomponenten des betrachteten Feldes in Richtung φ: $\mathfrak{E}_\varphi$ und $\mathfrak{H}_\varphi$ der Größe und Richtung nach in beiden Systemen (für ein und denselben Punkt) einander gleich. Indem wir diese Gleichheit beachten und die Feldstärkekomponenten nach Gl. (1) durch die Potentiale ausdrücken, erhalten wir Beziehungen zwischen den Potentialen in $r_1, \vartheta_1, \varphi_1$ und den Potentialen desselben Feldes in $r_2, \vartheta_2, \varphi_2$. Um diese Beziehungen auswerten zu können, wird es sich als nötig erweisen, Produkte der Form

$$\frac{\Psi_n(kr_2)}{kr_2} P_n^m(\cos\vartheta_2) \begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{matrix}$$

auf Koordinaten $r_1, \vartheta_1, \varphi$ zu transformieren. Diese Aufgabe soll zunächst im folgenden Paragraphen gelöst werden.

§ 3. Transformation der Produkte $\frac{\Psi_n(kr)}{kr} P_n^m(\cos\vartheta) \begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{matrix}$ auf Polarkoordinaten um einen neuen Koordinatenanfangspunkt auf der Achse

Es handelt sich um die Transformation, welche den Ursprung des Polarkoordinatensystems aus dem Mittelpunkt des einen Teilchens in den Mittelpunkt des anderen Teilchens verlegt. Wie schon

vorher bemerkt wurde, sollen die Koordinatensysteme in der Achse und der Ebene $\varphi = 0$ übereinstimmen. Dann ist die Transformation gegeben durch:

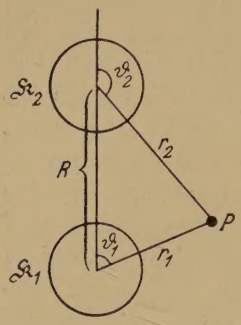

Fig. 1

$$(12)\qquad \begin{cases} r_2 \cos\vartheta_2 = r_1 \cos\vartheta_1 - R, \\ r_2 \sin\vartheta_2 = r_1 \sin\vartheta_1, \\ \varphi_2 = \varphi_1 = \varphi \quad \text{[Vgl. Fig. 1]}. \end{cases}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen von (12) folgt noch:

$$(12a)\qquad r_2^2 = r_1^2 + R^2 - 2 r_1 R \cos\vartheta_1 .$$

Diese Transformation ist nun anzuwenden auf Produkte der Form:

$$(13a)\qquad \frac{\Psi_n(k r_2)}{k r_2} P_n^m(\cos\vartheta_2) \cos m\varphi .$$

Daher ist der folgende Ausdruck zu untersuchen:

$$(13b)\qquad \frac{\Psi_n(k\sqrt{r_1^2 + R^2 - 2 r_1 R\cos\vartheta_1})}{k\sqrt{r_1^2 + R^2 - 2 r_1 R\cos\vartheta_1}} P_n^m\left\{\frac{r_1\cos\vartheta_1 - R}{\sqrt{r_1^2 + R^2 - 2 r_1 R\cos\vartheta_1}}\right\} \cos m\varphi .$$

Das Produkt (13a) ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta V + k^2 V = 0 .$$

Da diese Differentialgleichung gegen Parallelverschiebungen invariant ist, muß eine Lösung in alten Koordinaten durch eine Summe von Lösungen in neuen Koordinaten darstellbar sein, so daß von folgendem Ansatz ausgegangen werden kann:

$$(14a)\qquad \begin{aligned} &\frac{\Psi_n(k r_2)}{k r_2} P_n^m(\cos\vartheta_2)\cos m\varphi \\ &\quad = \sum_{\nu,\mu} \frac{\psi_\nu(k r_1)}{k r_1} P_\nu^\mu(\cos\vartheta_1)\left[A_{\nu,\mu}^{n,m}\cos\mu\varphi + \bar{A}_{\nu,\mu}^{n,m}\sin\mu\varphi\right] \\ &\quad + \sum_{\nu,\mu} \frac{\Psi_\nu(k r_1)}{k r_1} P_\nu^\mu(\cos\vartheta_1)\left[B_{\nu,\mu}^{n,m}\cos\mu\varphi + \bar{B}_{\nu,\mu}^{n,m}\sin\mu\varphi\right] . \end{aligned}$$

Da der Ausdruck links für $r_1 = 0$, also $r_2 = R$, endlich bleibt, muß rechts die zweite Summe fortfallen, da die Funktionen $\frac{\Psi_\nu(k r_1)}{k r_1}$ für $r_1 = 0$ einen Pol haben. Indem wir ferner links und rechts mit $\cos m\varphi$ multiplizieren und über φ von 0 bis 2π integrieren, folgt bei Berücksichtigung der Orthogonalitätseigenschaften der trigonometrischen Funktionen aus (14a):

$$(14b)\qquad \frac{\Psi_n(k r_2)}{k r_2} P_n^m(\cos\vartheta_2) = \sum_\nu A_\nu^{n,m} \frac{\psi_\nu(k r_1)}{k r_1} P_\nu^m(\cos\vartheta_1) .$$

Setzen wir $kr_2 = \zeta$, $kr_1 = z$ und $(kR) = Z$, so folgt aus (14b)

$$\frac{\Psi_n(\zeta)}{\zeta} P_n^m(\cos\vartheta_2) = \sum_\nu A_\nu^{n,m} \frac{\psi_\nu(z)}{z} P_\nu^m(\cos\vartheta_1). \tag{15}$$

Wir zerlegen

$$\frac{\Psi_n(\zeta)}{\zeta} = \frac{\psi_n(\zeta)}{\zeta} - i\frac{\chi_n(\zeta)}{\zeta}, \tag{16}$$

wobei nach Gl. (4)

$$\psi_n(\zeta) = \left(\frac{\pi\zeta}{2}\right)^{1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(\zeta), \qquad \chi_n(\zeta) = (-1)^n \left(\frac{\pi\zeta}{2}\right)^{1/2} J_{-n-\frac{1}{2}}(\zeta).$$

Dann sei $A_\nu^{n,m}$ so in $B_\nu^{n,m}$ und $C_\nu^{n,m}$ zerlegt, daß

$$\frac{\psi_n(\zeta)}{\zeta} P_n^m(\cos\vartheta_2) = \sum_\nu B_\nu^{n,m} \frac{\psi_\nu(z)}{z} P_\nu^m(\cos\vartheta_1), \tag{15a}$$

$$\frac{\chi_n(\zeta)}{\zeta} P_n^m(\cos\vartheta_2) = \sum_\nu C_\nu^{n,m} \frac{\psi_\nu(z)}{z} P_\nu^m(\cos\vartheta_1). \tag{15b}$$

Zur Ermittlung der noch unbestimmten Koeffizienten $B_\nu^{n,m}$, $C_\nu^{n,m}$ sollen die Zylinder- und Kugelfunktionen rechts und links in den Gl. (15a) und (15b) in Reihen entwickelt werden, die nach den Potenzen ihrer Argumente fortschreiten. Aus den Gl. (4) und (5) folgt:

$$\frac{\psi_n(x)}{x} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} c_n^\varkappa x^{n+2\varkappa} \text{ mit } c_n^\varkappa = \frac{(-1)^\varkappa \sqrt{\pi}}{2^{n+1+2\varkappa}\,\varkappa!\,\Gamma(n+\frac{1}{2}+\varkappa+1)}. \tag{17a}$$

Nun gilt aber nach Gauss:

$$\frac{2^{2\xi}\,\Gamma(\xi+1)\,\Gamma(\xi+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\xi+1)} = \sqrt{\pi},$$

ferner $\Gamma(p+1) = p!$, daher wird:

$$\Gamma\left(n+\varkappa+\frac{1}{2}+1\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,1\cdot3\cdot5\cdots(2n+2\varkappa+1)}{2^{n+\varkappa+1}},$$

so daß

$$c_n^\varkappa = \frac{(-1)^\varkappa}{2^\varkappa\,\varkappa!\,1\cdot3\cdot5\cdots(2n+2\varkappa+1)} \tag{17b}$$

wird. Ferner folgt auf den Gl. (4) und (5):

$$\frac{\chi_n(x)}{x} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} e_n^\varkappa x^{2\varkappa-n-1} \tag{18a}$$

mit

$$e_n^\varkappa = \frac{(-1)^{n+\varkappa}\sqrt{\pi}}{2^{2\varkappa-n}\,\varkappa!\,\Gamma(\varkappa+1-n-\frac{1}{2})}, \tag{18b}$$

und aus Gl. (6)

$$P_n^m(y) = \sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]} d_{n,m}^\lambda\, y^{n-m-2\lambda}(1-y^2)^{m/2}, \tag{19}$$

wobei sich die Koeffizienten $d^{\lambda}_{n,m}$ jeweils aus Gl. (6) ergeben. Indem wir nun die Gl. (17), (18), (19) auf Gl. (15a) anwenden und zugleich die einzelnen Faktoren links passend zusammenfassen, erhalten wir:

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{\varkappa} \sum_{\lambda} c^{\varkappa}_{n}\, d^{\lambda}_{n,m}\, \zeta^{2(\varkappa+\lambda)} (\zeta \cos\vartheta_2)^{n-2\lambda-m} (\zeta \sin\vartheta_2)^{m} \\ &= \sum_{\nu} \sum_{\sigma,\tau} B^{n,m}_{\nu}\, c^{\sigma}_{\nu}\, d^{\tau}_{\nu,m}\, z^{\nu+2\sigma} (\cos\vartheta_1)^{\nu-m-2\tau} (\sin\vartheta_1)^{m}. \end{aligned} \right.$$

Da wegen Gl. (12)

$$\zeta^2 = Z^2 + z^2 - 2Z z\cos\vartheta_1 \quad \text{und} \quad \zeta\cos\vartheta_2 = z\cos\vartheta_1 - Z,$$

ergibt sich nach dem Binomischen Satz:

$$(21a)\quad \left\{ \begin{aligned} (\zeta^2)^{\varkappa+\lambda} = \sum_{q=0}^{\varkappa+\lambda} (-2)^q \binom{\varkappa+\lambda}{q} \sum_{t=0}^{(\varkappa+\lambda-q)} \binom{\varkappa+\lambda-q}{t} \\ \cdot Z^{2(\varkappa+\lambda-q-t)+q}\, z^{q+2t} (\cos\vartheta_1)^q, \end{aligned} \right.$$

$$(21b)\quad (\zeta\cos\vartheta_2)^{n-2\lambda-m} = \sum_{p=0}^{n-2\lambda-m} \binom{n-2\lambda-m}{p} (-Z)^{n-2\lambda-m-p}\, z^p (\cos\vartheta_1)^p.$$

(21a) und (21b) in Gl. (20) eingesetzt, ergibt

$$(22)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{\varkappa=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]} c^{\varkappa}_{n}\, d^{\lambda}_{n,m} \sum_{p=0}^{(n-2\lambda-m)} \sum_{q=0}^{(\varkappa+\lambda)} \sum_{t=0}^{(\varkappa+\lambda-q)} (-1)^{n-m-2\lambda-p} \\ &\qquad (-2)^q \binom{n-2\lambda-m}{p} \binom{\varkappa+\lambda}{q} \binom{\varkappa+\lambda-q}{t} \\ &\qquad \cdot Z^{n-m+2\varkappa-(p+q+2t)}\, z^{p+q+2t} (\cos\vartheta_1)^{p+q} (z\sin\vartheta_1)^m \\ &= \sum_{\nu} \sum_{\sigma,\tau} B^{n,m}_{\nu}\, c^{\sigma}_{\nu}\, d^{\tau}_{\nu,m}\, z^{\nu+2\sigma} (\cos\vartheta_1)^{\nu-m-2\tau} (\sin\vartheta_1)^m. \end{aligned} \right.$$

Die Koeffizienten $B^{n,m}_{\nu}$ ergeben sich nun, indem man die Faktoren von $\mathfrak{T}^m_k = z^k \cdot (\cos\vartheta_1)^k (z\sin\vartheta_1)^m$ links und rechts miteinander vergleicht[1]). Dieser Koeffizientenvergleich braucht jedoch nicht all-

1) $\mathfrak{T}^m_k$ kommt nur in dem Produkt

$$B^{n,m}_{k+m} \cdot \frac{\psi_{k+m}(z)}{z}\, P^m_{k+m}(\cos\vartheta_1)$$

vor, denn z^{k+m} ist die niedrigste Potenz von z in $\dfrac{\psi_{k+m}(z)}{z}$ und $(\cos\vartheta_1)^k$ die höchste Potenz von $(\cos\vartheta_1)$ in $P^m_{k+m}(\cos\vartheta_1)$. Daher ist der Vergleich der Koeffizienten von $\mathfrak{T}^m_k$ zur Bestimmung der $B^{n,m}_{k+m}$ geeignet.

gemein für jedes n und m durchgeführt zu werden. Es wird sich im folgenden nur die Untersuchung der drei Fälle $n = m = 0$; $n = 1$, $m = 0$; $m = n = 1$ als notwendig erweisen. Wir untersuchen hintereinander diese drei Fälle.

I. Für $n = m = 0$ geht Gl. (22) über in

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\varkappa} \sum_{t=0}^{\varkappa-q} c_0^{\varkappa} (-2)^q \binom{\varkappa}{q} \binom{\varkappa - q}{t} Z^{2\varkappa-(q+2t)} z^{q+2t} (\cos\vartheta_1)^q = \sum_{\nu} B_\nu^0 \sum_{\sigma,\tau} c_\nu^\sigma d_{\nu,0}^\tau z^{\nu+2\sigma} (\cos\vartheta_1)^{\nu-2\tau}.$$

Vergleichen wir hierin die Koeffizienten von $z^k (\cos\vartheta_1)^k$ links und rechts, so folgt

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} c_0^{\varkappa} (-2)^k \binom{\varkappa}{k} Z^{2\varkappa-k} = B_k^0 c_k^0 d_{k,0}^0 . \tag{23}$$

Weil $\binom{\varkappa}{k} = 0$ für $\varkappa < k$, beginnt die Summe (23) erst mit $\varkappa = k$. Wir führen deshalb $\varkappa_1 = \varkappa - k$ als neuen Summationsbuchstaben ein. Dann folgt aus Gl. (23):

$$\sum_{\varkappa_1=0}^{\infty} c_0^{\varkappa_1+k} (-2)^k \binom{\varkappa_1 + k}{k} Z^{2\varkappa_1+k} = B_k^0 \cdot c_k^0 \cdot d_{k,0}^0. \tag{23a}$$

Unter Beachtung von Gl. (17b) und Gl. (6) folgt hieraus:

$$\sum_{\varkappa_1=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+\varkappa_1} (-2)^k \frac{(\varkappa_1 + k)!}{\varkappa_1!\, k!}}{2^{k+\varkappa_1} (k+\varkappa_1)!\, 1\cdot 3 \ldots (2k+2\varkappa_1+1)} = B_k^0 \frac{1}{1\cdot 3\ldots(2k+1)} \cdot \frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{k!}$$

und daraus ergibt sich:

$$B_k^0 = (2k+1) \sum_{\varkappa_1=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k_1}}{2^{\varkappa_1} \varkappa_1!\, 1\cdot 3\ldots(2k+2\varkappa_1+1)} Z^{k+2\varkappa_1}$$

und wegen Gl. (17a) und (17b):

$$B_k^0 = (2k+1) \sum_{\varkappa=0}^{\infty} c_k^{\varkappa_1} Z^{2\varkappa_1+k} = (2k+1) \frac{\psi_k(Z)}{Z}.$$

Dies in die Gl. (15a) für $n = m = o$ eingesetzt, ergibt:

$$\frac{\psi_0(\zeta)}{\zeta} P_0(\cos\vartheta_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (2\nu+1) \frac{\psi_\nu(Z)}{Z} \frac{\psi_\nu(z)}{z} P_\nu(\cos\vartheta_1). \tag{24}$$

II. Für $n = 1$, $m = 0$ geht Gl. (22) über in:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} c_1^{\varkappa} d_{10}^{0} \sum_{p=0}^{1} \sum_{q=0}^{\varkappa} \sum_{t=0}^{\varkappa-q} (-1)^{1-p} (-2)^{q} \binom{1}{p} \binom{\varkappa}{q} \binom{\varkappa-q}{t} Z^{1+2\varkappa-(p+q+2t)} \cdot z^{p+q+2t} (\cos\vartheta_1)^{p+q} = \sum_{\nu} B_{\nu}^{10} \sum_{\sigma,\tau} c_{\nu}^{\sigma} d_{\nu 0}^{\tau} z^{\nu+2\sigma} (\cos\vartheta_1)^{\nu-2\tau}.$$

Vergleichen wir in dieser Gleichung links und rechts die Koeffizienten von $z^k(\cos\vartheta_1)^k$, so folgt:

$$-\sum_{\varkappa=k}^{\infty} c_1^{\varkappa} (-2)^{k} \binom{\varkappa}{k} Z^{1+2\varkappa-k} + \sum_{\varkappa=k-1}^{\infty} c_1^{\varkappa} (-2)^{k-1} \binom{\varkappa}{k-1} \cdot Z^{1+2\varkappa-k} = B_k^{10} \cdot c_k^0 \cdot d_{k0}^0 .$$

Durch Einführung neuer Summationsbuchstaben $\varkappa_1 = \varkappa - k$ und $\varkappa_2 = \varkappa - k + 1$ ergibt sich hieraus

$$-\sum_{\varkappa_1=0}^{\infty} c_1^{\varkappa_1+k} (-2)^{k} \binom{\varkappa_1+k}{k} Z^{1+k+2\varkappa_1}$$

$$+\sum_{\varkappa_2=0}^{\infty} c_1^{\varkappa_2+k+1} (-2)^{k-1} \binom{\varkappa_2+k-1}{k-1} Z^{k-1+2\varkappa_2} = B_k^{10} \cdot c_k^0 \cdot d_{k0}^0 .$$

Unter Beachtung der Gl. (17b) und (6) folgt daraus:

$$-\sum_{\varkappa_1=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\varkappa_1+k} (-2)^{k} \frac{(\varkappa_1+k)!}{\varkappa_1!\, k!}}{2^{\varkappa_1+k} (\varkappa_1+k)!\, 1\cdot 3 \ldots (2\varkappa_1+2[k+1]+1)} Z^{k+1+2\varkappa_1}$$

$$+\sum_{\varkappa_2=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\varkappa_2+k-1} (-2)^{k-1} \frac{(\varkappa_2+k-1)!}{\varkappa_2!\,(k-1)!}}{2^{\varkappa_2+k-1} (\varkappa_2+k-1)!\, 1\cdot 3 \ldots (2\varkappa_1+2k+1)} Z^{2\varkappa_2+k-1} = B_k^{10} \frac{1}{(2k+1)\,k!}$$

oder

$$B_k^{10} = -(2k+1) \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{\varkappa} Z^{k+1+2\varkappa}}{2^{\varkappa} \varkappa!\, 1\cdot 3 \ldots (2\varkappa+2(k+1)+1)} - \frac{(-1)^{\varkappa} k Z^{k-1+2\varkappa}}{2^{\varkappa} \varkappa!\, 1\cdot 3 \ldots (2\varkappa+2k+1)} \right].$$

Wegen Gl. (17a) und (17b) folgt hieraus:

$$B_k^{10} = (2k+1) \left[-\sum c_{k+1}^{\varkappa} Z^{k+1+2\varkappa} + k \sum c_k^{\varkappa} \frac{Z^{k+2\varkappa}}{Z} \right]$$

$$= (2k+1) \left[-\frac{\psi_{k+1}(Z)}{Z} + k \frac{\psi_k(Z)}{Z^2} \right].$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gl. (15a) für $n = 1$, $m = 0$ ein, so erhalten wir:

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\psi_1(\zeta)}{\zeta} P_1(\cos\vartheta_2) = \sum_\nu (2\nu+1)\left[-\frac{\psi_{\nu+1}(Z)}{Z} + \nu \frac{\psi_\nu(Z)}{Z^2}\right] \\ \cdot \frac{\psi_\nu(z)}{(z)} P_\nu(\cos\vartheta_1). \end{aligned} \right.$$

III. Für $n = 1$, $m = 1$ geht Gl. (22) über in:

$$\sum_\varkappa c_1^\varkappa (-2)^k \binom{\varkappa}{k} \binom{\varkappa - q}{t} Z^{2\varkappa-(q+2t)} z^{q+2t} (\cos\vartheta_1)^q (z\sin\vartheta_1)$$

$$= \sum_\nu B_{\nu+1}^{11} \sum_{\sigma,\tau} c_{\nu+1}^\sigma d_{\nu+1,1}^\tau z^{\nu+1+2\sigma} (\cos\vartheta_1)^{\nu-2\tau} (\sin\vartheta_1).$$

[Rechts ist dabei ν durch $(\nu+1)$ ersetzt worden, weil z^1 die niedrigste Potenz von z ist, welche links und daher auch rechts auftreten kann.] Der Vergleich der Koeffizienten von $z^k (\cos\vartheta_1)^k (z\sin\vartheta_1)$ liefert:

$$\sum_\varkappa c_1^\varkappa (-2)^k \binom{\varkappa}{k} Z^{2\varkappa-k} = B_{k+1}^{11} c_{k+1}^0 d_{k+1,1}^0.$$

Ändern wir wieder den Summationsbuchstaben ($\varkappa = \varkappa_1 + k$), so folgt

$$\sum_{\varkappa_1=0}^\infty c_1^{\varkappa_1+k} (-2)^k \binom{\varkappa_1+k}{k} Z^{2\varkappa_1+k} = B_{k+1}^{11} \cdot c_{k+1}^0 \cdot d_{k+1,1}^0.$$

Beachten wir Gl. (17b) und (6), so ergibt sich weiter:

$$\sum_{\varkappa_1=0}^\infty \frac{(-1)^{\varkappa_1+k}(-2)^k \frac{(\varkappa_1+k)!}{\varkappa_1!\,k!}}{2^{\varkappa_1+k}(\varkappa_1+k)!\,1\cdot 3\ldots(2\varkappa_1+2[k+1]+1)} Z^{2\varkappa_1+k} = B_k^{11} \frac{1}{(2k+3)\,k!},$$

oder

$$B_{k+1}^{11} = (2k+3)\sum_\varkappa \frac{(-1)^\varkappa}{2^\varkappa \varkappa!\,1\cdot 3\ldots(2\varkappa+2(k+1)+1)} Z^{2\varkappa+k}$$

$$= (2k+3)\sum_\varkappa c_{k+1}^\varkappa Z^{k+2\varkappa} = (2k+3)\frac{\psi_{k+1}(Z)}{Z^{k+1}}.$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gl. (15a) für $n = 1$, $m = 1$ ein, so erhalten wir:

$$(26)\quad \frac{\psi_1(\zeta)}{\zeta} P_1^1(\cos\vartheta_2) = \sum_\nu (2\nu+3) \frac{\psi_{\nu+1}(Z)}{Z^{\nu+1}} \frac{\psi_{\nu+1}(z)}{z} P_{\nu+1}^1(\cos\vartheta_1).$$

Im folgenden sollen nun die entsprechenden Additionstheoreme für die Produkte $\frac{\chi_n(\zeta)}{\zeta} P_n^m(\cos\vartheta_2)$ abgeleitet werden. Wir wenden dazu die Gl. (17), (18), (19) auf die Gl. (15b) an und erhalten, wenn wir gleich wieder die Faktoren links passend zusammenfassen:

$$(27)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{\varkappa}\sum_{\lambda} e_n^{\varkappa}\, d_{n,m}^{\lambda}\, \zeta^{2(\varkappa+\lambda-n)-1}(\zeta\cos\vartheta_2)^{n-m-2\lambda}(\zeta\sin\vartheta_2)^m \\ &= \sum_{\nu}\sum_{\sigma,\tau} C_{\nu}^{n,m}\, c_{\nu}^{\sigma}\, d_{\nu,m}^{\tau}\, z^{\nu+2\sigma}(\cos\vartheta_1)^{\nu-m-2\tau}(\sin\vartheta_1)^m . \end{aligned} \right.$$

Der Exponent von $\zeta^2 = Z^2 + z^2 - 2Zz\cos\vartheta_1$ ist in diesem Falle $l = \varkappa + \lambda - n - \frac{1}{2}$, also gebrochen. Die unendliche Reihe, die sich für

$$(\zeta^2)^l = Z^{2l}\left[1+\left(\frac{z}{Z}\right)^2\right]^l \left[1 - \frac{2\left(\frac{z}{Z}\right)\cos\vartheta_1}{1+\left(\frac{z}{Z}\right)^2}\right]^l$$

ergibt, konvergiert nur dann sicher, wenn $\frac{z}{Z} < 1$, also $z < Z$ ist. Daher werden die abzuleitenden Entwicklungen auch nur für diesen Fall $z < Z$ oder $r_1 < R$ gelten. Da es sich aber um die Erfüllung der Grenzbedingungen an der Oberfläche des Teilchens $\mathfrak{K}_1$ handelt, brauchen wir die Additionstheoreme nur für $r_1 = a$ (a Kugelradius). Der Kugelradius ist aber sicher kleiner als die Entfernung R der Kugelmittelpunkte, so daß die obige Konvergenzbedingung erfüllt ist.

Setzen wir nun in Gl. (27) die unendliche Reihe für $(\zeta^2)^l$ und die sich nach dem Binomischen Satz für $(\zeta\cos\vartheta_2)^{n-m-2\lambda}$ ergebende endliche Summe ein, so erhalten wir:

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty} e_n^{\varkappa}\, d_{n,m}^{\lambda} \sum_{p=0}^{n-m-2\lambda}\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{q} (-1)^{n-m-2\lambda-p}(-2)^t \\ &\quad \cdot \binom{n-m-2\lambda}{p}\binom{\varkappa+\lambda-n-\frac{1}{2}}{q}\binom{q}{t} \\ &\quad \cdot Z^{-n-m-1+2\varkappa-(p+2q-t)} z^{p+2q-t}(\cos\vartheta_1)^{p+t}(z\sin\vartheta_1)^m \\ &= \sum_{\nu}\sum_{\sigma,\tau} C_{\nu}^{n,m}\, c_{\nu}^{\sigma}\, d_{\nu,m}^{\tau}\, z^{\nu+2\sigma}(\cos\vartheta_1)^{\nu-m-2\tau}(\sin\vartheta_1)^m . \end{aligned} \right.$$

Die Größen $C_{\nu}^{n,m}$ ergeben sich nun wie vorher die $B_{\nu}^{n,m}$, indem man die Koeffizienten von $z^k\cdot(\cos\vartheta_1)^k\cdot(z\sin\vartheta_1)^m$ links und rechts miteinander vergleicht. Dieser Koeffizientenvergleich braucht wieder nur für die drei Fälle $n=0,\ m=0$; $n=1,\ m=0$; $n=1,\ m=1$ durchgeführt zu werden.

I. Für $n = m = 0$ geht Gl. (28) über in:

$$\sum_{\varkappa} e_0^{\varkappa}\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{q}(-2)^t\binom{\varkappa+\lambda-\frac{1}{2}}{q}\binom{q}{t} Z^{-1+2\varkappa-(2q-t)} z^{(2q-t)}(\cos\vartheta_1)^t$$
$$= \sum_{\nu}\sum_{\sigma,\tau} e_{\nu}^{0}\, c_{\nu}^{0}\, d_{\nu 0}^{\tau}\, z^{\nu+2\sigma}(\cos\vartheta_1)^{\nu-2\tau}.$$

Der Vergleich der Koeffizienten von $z^k (\cos \vartheta_1)^k$ liefert daraus:

$$\sum_{\varkappa} e_0^{\varkappa} (-2)^k \binom{\varkappa - \frac{1}{2}}{k} Z^{-1+2\varkappa-k} = C_k^0 \, c_k^0 \, d_{k0}^0 .$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (17b), (18b), (6) und der folgenden Beziehung für die Γ-Funktion

(29) $$\Gamma\left(\varkappa - \frac{1}{2} - k + 1\right) = \frac{\Gamma(\varkappa - \frac{1}{2} + 1)}{(\varkappa - \frac{1}{2})(\varkappa - \frac{1}{2} - 1) \cdots (\varkappa - \frac{1}{2} - k + 1)}$$

folgt:

$$\sum_{\varkappa} \frac{(-1)^{\varkappa} \sqrt{\pi} (-2)^k \binom{\varkappa - \frac{1}{2}}{k}}{2^{2\varkappa} \varkappa! \, \Gamma(\varkappa - \frac{1}{2} + 1)} Z^{-(k+1)+2\varkappa} = C_k^0 \frac{1}{(2k+1)} \cdot \frac{1}{k!}$$

oder

$$C_k^0 = (2k+1) \sum_{\varkappa} \frac{(-1)^{k+\varkappa} \sqrt{\pi}}{2^{2\varkappa-k} \varkappa! \, \Gamma(\varkappa + 1 - k - \frac{1}{2})} Z^{2\varkappa-k-1} .$$

Nach Gl. (18a) und (18b) folgt daraus aber:

$$C_k^0 = (2k+1) \sum_{\varkappa} e_k^{\varkappa} Z^{2\varkappa-(k+1)} = (2k+1) \frac{\chi_k(Z)}{Z} .$$

Dies in Gl. (15b) für $n = m = 0$ eingesetzt, ergibt:

(30) $$\frac{\chi_0(\zeta)}{\zeta} P_0(\cos \vartheta_2) = \sum_{\nu} (2\nu + 1) \frac{\chi_\nu(Z)}{Z} \frac{\psi_\nu(z)}{z} P_\nu(\cos \vartheta_1) .$$

II. Für $n = 1$, $m = 0$ geht Gl. (28) über in:

$$\sum_{\varkappa} e_1^{\varkappa} d_{10}^0 \sum_{p=0}^{1} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{q} (-1)^{1-p} (-2)^t \binom{1}{p} \binom{\varkappa - 1 - \frac{1}{2}}{q} \binom{q}{t}$$
$$\cdot Z^{-2+2\varkappa-(p+2q-t)} z^{p+2q-t} (\cos \vartheta_1)^{p+t}$$
$$= \sum_{\nu} \sum_{\sigma, \tau} C_\nu^{m,m} \, c_\nu^\sigma \, d_{\nu,m}^\tau \, z^{\nu+2\sigma} (\cos \vartheta_1)^{\nu-2\tau} .$$

Der Vergleich der Koeffizienten von $z^k (\cos \vartheta_1)^k$ liefert daraus:

$$\sum_{\varkappa} e_1^{\varkappa} \left[-\binom{\varkappa - 1 - \frac{1}{2}}{k} (-2)^k + \binom{\varkappa - 1 - \frac{1}{2}}{k-1} (-2)^{k-1} \right]$$
$$\cdot Z^{-(k+2)+2\varkappa} = C_k^{10} \cdot e_k^0 \cdot d_{k,0}^0 .$$

Setzen wir in diese Gleichung die Werte für $e_1^{\varkappa}$, e_k^0, d_{k0}^0 ein, die die Gl. (17b), (18b), (6) ergeben und beachten wir Gl. (29), so ergibt sich:

$$\sum_{\varkappa} \left\{ -\frac{(-1)^{\varkappa+1} \sqrt{\pi} \binom{\varkappa-1-\frac{1}{2}}{k} (-2)^k}{2^{2\varkappa-1} \varkappa! \, \Gamma(\varkappa + 1 - (1 + \frac{1}{2}))} + \frac{(-1)^{\varkappa+1} \sqrt{\pi} (-2)^{k-1} \binom{\varkappa-1-\frac{1}{2}}{k-1}}{2^{2\varkappa-1} \varkappa! \, \Gamma(\varkappa + 1 - (1 + \frac{1}{2}))} \right\}$$
$$\cdot Z^{-(k+2)+2\varkappa} = \frac{C_k^{10}}{k! \, (2k+1)}$$

oder

$$C_k^{10} = (2k+1)\sum_\varkappa \left\{ - \frac{(-1)^{\varkappa+1+k}\sqrt{\pi}\, Z^{-(k+2)+2\varkappa}}{2^{2\varkappa-k-1}\,\varkappa!\,\Gamma\left(\varkappa-k+1-(1+\frac{1}{2})\right)} + k\,\frac{(-1)^{\varkappa+k}\sqrt{\pi}\, Z^{-(k+2)+2\varkappa}}{2^{2\varkappa-k}\,\varkappa!\,\Gamma\left(\varkappa+1-(k+\frac{1}{2})\right)} \right\}.$$

Nach Gl. (18a) und (18b) folgt daraus:

$$C_k^{10} = (2k+1)\left\{ - \frac{\chi_{k+1}(Z)}{Z} + k\,\frac{\chi_k(Z)}{Z^2} \right\}.$$

Setzen wir dies in Gl. (15b) für $n=1$, $m=0$ ein, so ergibt sich:

$$\left\{ \frac{\chi_1(\zeta)}{\zeta} P_1(\cos\vartheta_2) = \sum_\nu (2\nu+1)\left[- \frac{\chi_{\nu+1}(Z)}{Z} + \nu\,\frac{\chi_\nu(Z)}{Z^2}\right] \cdot \frac{\psi_\nu(z)}{z} P_\nu(\cos\vartheta_1). \right. \tag{31}$$

III. Für $n=m=1$ geht Gl. (28) über in:

$$\sum_\varkappa e_1^\varkappa \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{q} (-2)^t \binom{\varkappa-1-\frac{1}{2}}{q}\binom{q}{t} Z^{-3+2\varkappa-(2q-t)}\, z^{(2q-t)} (\cos\vartheta_1)^t (z\sin\vartheta_1)$$
$$= \sum_\nu \sum_{\sigma,\tau} C_{\nu+1}^{11}\, c_{\nu+1}^{\sigma}\, d_{\nu+1,1}^{\tau}\, z^{\nu+1+2\sigma} (\cos\vartheta_1)^{\nu-2\tau} (\sin\vartheta_1).$$

Wie vorher an der entsprechenden Stelle ist auch hier rechts der Summationsbuchstabe ν durch $(\nu+1)$ ersetzt worden, weil z^1 die niedrigste Potenz von z ist, welche auftreten kann. Der Vergleich der Koeffizienten von $z^k(\cos\vartheta_1)^k(z\sin\vartheta_1)$ liefert:

$$\sum_\varkappa e_1^\varkappa \binom{\varkappa-1-\frac{1}{2}}{k} (-2)^k Z^{-(k+3)+2\varkappa} = C_{k+1}^{11}\cdot c_{k+1}^0 \cdot d_{k+1}^0.$$

Wegen Gl. (17b), (18b), (6) und (29) folgt daraus:

$$C_{k+1}^{11} = (2k+3)\sum_\varkappa \frac{(-1)^{\varkappa+k+2}\sqrt{\pi}}{2^{2\varkappa-(k+1)}\,\varkappa!\,\Gamma\left(\varkappa+1-(k+1+\frac{1}{2})\right)} Z^{-(k+3)+2\varkappa},$$

und nach Gl. (18a) und (18b)

$$C_{k+1}^{11} = (2k+3)\sum_\varkappa e_{k+1}^\varkappa \frac{Z^{-(k+2)+2\varkappa}}{Z} = (2k+3)\,\frac{\chi_{k+1}(Z)}{Z^2}.$$

Setzen wir dieses Ergebnis in die Gl. (15b) für $n=1$, $m=1$ ein, so erhalten wir:

$$\frac{\chi_1(\zeta)}{\zeta} P_1^1(\cos\vartheta_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (2\nu+3)\,\frac{\chi_{\nu+1}(Z)}{Z^2}\,\frac{\psi_{\nu+1}(z)}{z} P_{\nu+1}^1(\cos\vartheta_1). \tag{32}$$

Jede der Gl. (30), (31), (32) steht dabei unter der Bedingung $z < Z$.

Fassen wir nun die Gl. (24) und (30), (25) und (31), (26) und 32) durch Gl. (16) zusammen und setzen wir wieder

$$\zeta = k r_2, \quad z = k r_1, \quad Z = k R,$$

so erhalten wir:

$$(33) \quad \frac{\Psi_0(k r_2)}{k r_2} P_0(\cos \vartheta_2) = \sum_\nu (2\nu+1) \frac{\Psi_\nu(kR)}{kR} \cdot \frac{\psi_\nu(k r_1)}{k r_1} P_\nu(\cos \vartheta_1),$$

$$(34) \quad \begin{cases} \dfrac{\Psi_1(k r_2)}{k r_2} P_1(\cos \vartheta_2) = \displaystyle\sum_\nu (2\nu+1) \left[- \frac{\Psi_{\nu+1}(kR)}{kR} + \nu \frac{\Psi_\nu(kR)}{(kR)^2} \right] \\ \qquad\qquad \cdot \dfrac{\psi_\nu(k r_1)}{k r_1} P_\nu(\cos \vartheta_1), \end{cases}$$

$$(35) \quad \frac{\Psi_1(k r_2)}{k r_2} P_1^1(\cos \vartheta_2) = \sum_\nu (2\nu+3) \frac{\Psi_{\nu+1}(kR)}{(kR)^2} \cdot \frac{\psi_{\nu+1}(k r_1)}{k r_1} P_{\nu+1}^1(\cos \vartheta_1),$$

wobei $r_1 < R$ ist.

§ 4. Die Streupotentiale eines Teilchens bei einer Transformation, die den Koordinatenursprung aus dem Mittelpunkt dieses Teilchens in den Mittelpunkt eines anderen Teilchens verlegt

Gegeben sei das Streufeld des Teilchens $\mathfrak{K}_2$ durch seine Potentiale in Koordinaten r_2, ϑ_2, φ:

$$(36) \quad \begin{cases} \Pi_2^E = \dfrac{1}{k} \dfrac{\Psi_1(k r_2)}{k r_2} \left[{}_2E_{10} P_1(\cos \vartheta_2) + P_1^1(\cos \vartheta_2) \right. \\ \qquad\qquad \left. \cdot \left({}_2E_{11} \cos \varphi + {}_2\bar{E}_{11} \sin \varphi \right) \right], \\ \Pi_2^H = 0 \qquad \text{(nach Gl. (11))}. \end{cases}$$

Der untere Index 2 soll andeuten, daß es sich um das Streufeld des Teilchens $\mathfrak{K}_2$ handelt.

Gesucht sind die Potentiale desselben Feldes, aber jetzt in Koordinaten r_1, ϑ_1, φ, wobei $(r_2, \vartheta_2, \varphi)$ und $(r_1, \vartheta_1, \varphi)$ durch die Gl. (12) miteinander verknüpft sind:

$$(37) \quad \begin{cases} \Pi_{21}^E = \dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{n,m} \frac{\psi_n(k r_1)}{k r_1} P_n^m(\cos \vartheta_1) \\ \qquad\qquad \cdot \left[{}_{21}E_{n,m} \cos m\varphi + {}_{21}\bar{E}_{n,m} \sin m\varphi \right], \\ \Pi_{21}^H = \dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{n,m} \frac{\psi_n(k r_1)}{k r_1} P_n^m(\cos \vartheta_1) \\ \qquad\qquad \cdot \left[{}_{21}H_{n,m} \cos m\varphi + {}_{21}\bar{H}_{n,m} \sin m\varphi \right]. \end{cases}$$

Die unteren Indizes 2,1 sollen hier andeuten, daß es sich um das Streufeld des Teilchens $\mathfrak{K}_2$, aber in Koordinaten r_1, ϑ_1, φ mit dem Ursprung im Mittelpunkt von $\mathfrak{K}_1$ handelt.

Wie bereits in § 2 angedeutet wurde, sollen die Koeffizienten der Gl. (37) aus denen der Gl. (36) ermittelt werden, indem benutzt wird, daß bei der speziellen Wahl der beiden Koordinatensysteme die Feldstärkekomponenten in Richtung φ: $\mathfrak{E}_\varphi$, $\mathfrak{H}_\varphi$ in beiden Systemen der Größe und Richtung nach die gleichen sind. Wir drücken dies durch folgende Gleichungen aus:

$$(38)\qquad \begin{cases} {}_2\mathfrak{E}_\varphi(r_2, \vartheta_2, \varphi) = {}_{21}\mathfrak{E}_\varphi(r_1, \vartheta_1, \varphi), \\ {}_2\mathfrak{H}_\varphi(r_2, \vartheta_2 \varphi) = {}_{21}\mathfrak{H}_\varphi(r_1, \vartheta_1, \varphi), \end{cases}$$

wobei ${}_2\mathfrak{E}_\varphi$, ${}_2\mathfrak{H}_\varphi$ die φ-Komponenten der Streufeldstärken von $\mathfrak{K}_2$ in Koordinaten $(r_2, \vartheta_2, \varphi)$ und ${}_{21}\mathfrak{E}_\varphi$, ${}_{21}\mathfrak{H}_\varphi$ dieselben Komponenten in Koordinaten $(r_1, \vartheta_1, \varphi)$ bedeuten.

Da beide Feldstärken $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ in zwei Teile zerlegt sind (§ 1), schreiben wir die Gl. (38) besser in der Form:

$$(38\,a)\qquad {}_2\mathfrak{E}_\varphi^{(1)} + {}_2\mathfrak{E}_\varphi^{(2)} = {}_{21}\mathfrak{E}_\varphi^{(1)} + {}_{21}\mathfrak{E}_\varphi^{(2)},$$

$$(38\,b)\qquad {}_2\mathfrak{H}_\varphi^{(1)} + {}_2\mathfrak{H}_\varphi^{(2)} = {}_{21}\mathfrak{H}_\varphi^{(1)} + {}_{21}\mathfrak{H}_\varphi^{(2)}.$$

Berechnen wir die einzelnen Feldstärkekomponenten nach den Gl. (1) und setzen wir sie in (38a) und (38b) ein, so erhalten wir:

$$(39\,a)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{r_2 \sin \vartheta_2} \dfrac{\partial^2 r_2 \Pi_2^E}{\partial r_2 \partial \varphi} + \dfrac{i\omega}{c} \dfrac{1}{r_2} \dfrac{\partial r_2 \Pi_2^H}{\partial \vartheta_2} \\ = \dfrac{1}{r_1 \sin \vartheta_1} \dfrac{\partial^2 r_1 \Pi_{21}^E}{\partial r_1 \partial \varphi} + \dfrac{i\omega}{c} \dfrac{1}{r_1} \dfrac{\partial r_1 \Pi_{21}^H}{\partial \vartheta_1}, \end{cases}$$

$$(39\,b)\qquad \begin{cases} -j \dfrac{\partial r_2 \Pi_2^E}{r_2 \partial \vartheta_2} + \dfrac{1}{r_2 \sin \vartheta_2} \dfrac{\partial^2 r_2 \Pi_2^H}{\partial r_2 \partial \varphi} \\ = -j \dfrac{\partial r_1 \Pi_{21}^E}{r_1 \partial \vartheta_1} + \dfrac{1}{r_1 \sin \vartheta_1} \dfrac{\partial^2 r_1 \Pi_{21}^H}{\partial r_1 \partial \varphi}, \end{cases}$$

wobei $j = \dfrac{\sigma + i\varepsilon\omega}{c}$.

Setzen wir die Reihen (36) und (37) für die Potentiale in Gl. (39a) ein, so ergibt sich:

$$(40)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{kr_2} \dfrac{\partial \Psi_1(kr_2)}{\partial r_2} [-{}_2E_{11} \sin \varphi + {}_2E_{11} \cos \varphi] \\ \quad = \dfrac{1}{kr_1 \sin \vartheta_1} \sum_{n,m} \dfrac{\partial \psi_n(kr_1)}{\partial r_1} P_n^m(\cos \vartheta_1) \\ \qquad [-{}_{21}E_{n,m} \cdot m \sin m\varphi + {}_{21}\bar{E}_{n,m} m \cos m\varphi] \\ \quad + \dfrac{i\omega}{c} \sum_{n,m} \dfrac{\psi_n(kr_1)}{kr_1} \dfrac{\partial P_n^m(\cos \vartheta_1)}{\partial \vartheta_1} \\ \qquad \cdot [{}_{21}H_{n,m} \cos m\varphi + {}_{21}\bar{H}_{n,m} \sin m\varphi]. \end{cases}$$

Nun gilt:

$$\frac{1}{k r_2} \frac{\partial \Psi_1(k r_2)}{\partial r_2} = k \left[\frac{\Psi_0(k r_2)}{k r_2} - \frac{\Psi_1(k r_2)}{(k r_2)^2} \right] \text{[1]}. \tag{41}$$

Nach Gl. (33) gilt:

$$\frac{\Psi_0(k r_2)}{k r_2} = \sum_\nu (2\nu + 1) \frac{\Psi_\nu(kR)}{kR} \frac{\psi_\nu(k r_1)}{k r_1} P_\nu(\cos \vartheta_1)$$

und benutzen wir, daß

$$P_\nu(\cos \vartheta_1) = \frac{P^1_{\nu+1}(\cos \vartheta_1) - P^1_{\nu-1}(\cos \vartheta_1)}{(2\nu + 1) \sin \vartheta_1} \text{[2]}, \tag{42}$$

so folgt:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\Psi_0(k r_2)}{k r_2} = \frac{1}{\sin \vartheta_1} \sum_\nu & \frac{\Psi_\nu(kR)}{kR} \frac{\psi_\nu(k r_1)}{(k r_1)} \\ & \cdot \left[P^1_{\nu+1}(\cos \vartheta_1) - P^1_{\nu-1}(\cos \vartheta_1) \right]. \end{aligned} \right. \tag{43}$$

Aus Gl. (35) folgt, wenn man beachtet, daß

$$P_1{}^1(\cos \vartheta_2) = \sin \vartheta_2 \quad \text{und} \quad r_2 \sin \vartheta_2 = r_1 \sin \vartheta_1$$

ist,

$$\frac{\Psi_1(k r_2)}{(k r_2)^2} = \frac{1}{\sin \vartheta_1} \sum_\nu (2\nu + 3) \frac{\Psi_{\nu+1}(kR)}{(kR)^2} \frac{\psi_{\nu+1}(k r_1)}{(k r_1)^2} P^1_{\nu+1}(\cos \vartheta_1). \tag{44}$$

Gl. (43) und (44) in Gl. (41) eingesetzt, ergibt:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{k r_2} \cdot \frac{\partial \Psi_1(k r_2)}{\partial r_2} = \frac{k}{\sin \vartheta_1} \Bigg[& \sum_\nu \frac{\Psi_\nu(kR)}{kR} \frac{\psi_\nu(k r_1)}{k r_1} \\ & \cdot \left(P^1_{\nu+1}(\cos \vartheta_1) - P^1_{\nu-1}(\cos \vartheta_1) \right) \\ & - \sum_\nu (2\nu + 3) \frac{\Psi_{\nu+1}(kR)}{(kR)^2} \frac{\psi_{\nu+1}(k r_1)}{(k r_1)^2} P^1_{\nu+1}(\cos \vartheta_1) \Bigg]. \end{aligned} \right. \tag{45}$$

Ferner ist

$$\frac{1}{k r_1} \frac{\partial \psi_\nu(k r_1)}{\partial r_1} = k \left[\frac{\psi_{\nu-1}(k r_1)}{k r_1} - \nu \frac{\psi_\nu(k r_1)}{k r_1} \right] \text{[1]}. \tag{46}$$

Setzen wir (45) und (46) in Gl. (40) ein und vergleichen wir die Koeffizienten von $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ links und rechts, so ergeben sich die Gleichungen:

---

1) E. Jahnke-Emde, Funktionentafeln, 1. Aufl., S. 165.
2) C. Neumann, Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen.

$$
(47\,a)\quad \left\{\begin{aligned}
& k\cdot {}_2\bar{E}_{11}\left\{\sum_\nu \frac{\Psi_\nu(kR)}{kR}\,\frac{\psi_\nu(kr_1)}{kr_1}\left[P^1_{\nu+1}(\cos\vartheta_1)-P^1_{\nu-1}(\cos\vartheta_1)\right]\right.\\
&\qquad\left.-\sum_\nu (2\nu+3)\frac{\Psi_{\nu+1}(kR)}{(kR)^2}\,\frac{\psi_{\nu+1}(kr_1)}{(kr_1)^2}\,P^1_{\nu+1}(\cos\vartheta_1)\right\}\\
&= k\sum_\nu {}_2\bar{E}_{\nu 1}\left[\frac{\psi_{\nu-1}(kr_1)}{kr_1}-\nu\frac{\psi_\nu(kr_1)}{(kr_1)^2}\right]P^1_\nu(\cos\vartheta_1)\\
&\qquad+\frac{i\omega}{c}\sum_\nu \frac{\psi_\nu(kr_1)}{kr_1}\,{}_2H_{\nu 1}\cdot\sin\vartheta_1\cdot\frac{\partial P_\nu{}^1(\cos\vartheta_1)}{\partial\vartheta_1},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(47\,b)\quad \left\{\begin{aligned}
& k\cdot {}_2E_{11}\left\{\sum_\nu \frac{\Psi_\nu(kR)}{kR}\,\frac{\psi_\nu(kr_1)}{kr_1}\left[P^1_{\nu+1}(\cos\vartheta_1)-P^1_{\nu-1}(\cos\vartheta_1)\right]\right.\\
&\qquad\left.-\sum_\nu (2\nu+3)\frac{\Psi_{\nu+1}(kR)}{(kR)^2}\,\frac{\psi_{\nu+1}(kr_1)}{(kr_1)^2}\,P^1_{\nu+1}(\cos\vartheta_1)\right\}\\
&= k\sum_\nu {}_2E_{\nu 1}\left[\frac{\psi_{\nu-1}(kr_1)}{kr_1}-\nu\frac{\psi_\nu(kr_1)}{(kr_1)^2}\right]P^1_\nu(\cos\vartheta_1)\\
&\qquad-\frac{i\omega}{c}\sum_\nu {}_2\bar{H}_{\nu 1}\,\frac{\psi_\nu(kr_1)}{kr_1}\sin\vartheta_1\,\frac{\partial P_\nu{}^1(\cos\vartheta_1)}{\partial\vartheta_1}.
\end{aligned}\right.
$$

Gl. (47b) unterscheidet sich von Gl. (47a) dadurch, daß an die Stelle von ${}_2\bar{E}_{11}-{}_2E_{11}$, von ${}_{21}\bar{E}_{\nu 1}-{}_{21}E_{\nu 1}$ und von ${}_{21}H_{\nu 1}-{}_{21}\bar{H}_{\nu 1}$ tritt. Wir brauchen daher im folgenden nur Gl. (47a) zu beachten und im Ergebnis dann auch die entsprechende Vertauschung vorzunehmen. Wir multiplizieren nun Gl. (47a) mit $P_\varkappa{}^1(\cos\vartheta_1)$ und integrieren über $(\cos\vartheta_1)$ zwischen den Grenzen $+1$, -1. Dabei ist zu beachten, daß

$$
(48\,a)\qquad \int_{-1}^{+1}\left(P^1_\varkappa(x)\right)^2 dx=\frac{2\varkappa(\varkappa+1)}{2\varkappa+1}=J_\varkappa
$$

ist, während $\int_{-1}^{+1} P^1_\varkappa P^1_\lambda = 0$ ist, für $\varkappa \neq \lambda$. Ferner treten dann Integrale der Form:

$$
J_\nu=\int_{-1}^{+1}\sin\vartheta_1\,\frac{\partial P_\nu{}^1(\cos\vartheta_1)}{\partial\vartheta_1}\,P_\varkappa{}^1(\cos\vartheta_1)\,d\cos\vartheta_1
$$

auf. Unter Beachtung der Beziehung

$$
\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(P^m_n(\cos\vartheta)\right)=\frac{1}{2}\left\{(n-m+1)(n+m)\,P^{m-1}_n(\cos\vartheta)-P^{m+1}_n(\cos\vartheta)\right\}
$$

folgt:

$$J_\nu = \int_{-1}^{+1} \frac{\nu(\nu+1)}{2} P_\nu^0(\cos\vartheta_1) \sin\vartheta_1 \, P_\varkappa^1(\cos\vartheta_1)\, d\cos\vartheta_1$$

$$- \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} P_\nu^1(\cos\vartheta_1)\, P_\varkappa^1(\cos\vartheta_1) \sin\vartheta_1 \, d\cos\vartheta_1 .$$

Setzen wir nun im ersten Summanden

$$\sin\vartheta_1 \cdot P_\nu^0(\cos\vartheta_1) = \frac{P_{\nu+1}^1(\cos\vartheta_1) - P_{\nu-1}^1(\cos\vartheta_1)}{2\nu+1}$$

und im zweiten

$$\sin\vartheta_1 \cdot P_\varkappa^1(\cos\vartheta_1) = \frac{P_{\varkappa+1}^2(\cos\vartheta_1) - P_{\varkappa-1}^2(\cos\vartheta_1)}{2\varkappa+1},$$

so folgt:

$$J_\nu = \frac{1}{2}\frac{\nu(\nu+1)}{(2\nu+1)} \int_{-1}^{+1} P_\varkappa^1 P_{\nu+1}^1 - \frac{1}{2}\frac{\nu(\nu+1)}{(2\nu+1)} \int_{-1}^{+1} P_\varkappa^1 P_{\nu-1}$$

$$- \frac{1}{2(2\varkappa+1)} \int_{-1}^{+1} P_\nu^2 P_{\varkappa+1}^2 - \frac{1}{2(2\varkappa+1)} \int P_\nu^2 P_{\varkappa-1}^2 .$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, daß J_ν nur dann von Null verschieden ist, wenn

1. $\nu = \varkappa - 1 \quad (J_\nu = J_{\varkappa-1})$,
2. $\nu = \varkappa + 1 \quad (J_\nu = J_{\varkappa+1})$

ist. Dann folgt:

(48b) $$J_{\varkappa-1} = \frac{\varkappa(\varkappa-1)}{2(2\varkappa-1)} \cdot \frac{2\varkappa(\varkappa+1)}{(2\varkappa+1)} + \frac{2\varkappa(\varkappa-1)(\varkappa+1)(\varkappa+2)}{2(2\varkappa+1)(2\varkappa-1)} = \frac{(\varkappa-1)^2}{(2\varkappa-1)} J_\varkappa,$$

(48c) $$\left\{ \begin{aligned} J_{\varkappa+1} &= -\frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}{2(2\varkappa+3)} \frac{2\varkappa(\varkappa+1)}{(2\varkappa+1)} \\ &\quad - \frac{2\varkappa(\varkappa+3)(\varkappa+2)(\varkappa+1)}{2(2\varkappa+1)(2\varkappa+3)} = -\frac{(\varkappa+2)^2}{(2\varkappa+3)} J_\varkappa . \end{aligned} \right.$$

Mit (48a), (48b), (48c) ergibt sich dann aus Gl. (47a):

(49) $$\left\{ \begin{aligned} {}_2\bar{E}_{11} \cdot k \Big[&\frac{\Psi_{\varkappa-1}(kR)}{kR} \frac{\psi_{\varkappa-1}(kr_1)}{kr_1} - \frac{\Psi_{\varkappa+1}(kR)}{kR} \frac{\psi_{\varkappa+1}(kr_1)}{kr_1} \\ &- (2\varkappa+1) \frac{\Psi_\varkappa(kR)}{(kR)^2} \frac{\psi_\varkappa(kr_1)}{(kr_1)^2} \Big] \\ = {}_{21}\bar{E}_{\varkappa 1} \cdot k \Big[&\frac{\psi_{\varkappa-1}(kr_1)}{kr_1} - \varkappa \frac{\psi_\varkappa(kr_1)}{(kr_1)^2} \Big] \\ + {}_{21}H_{\varkappa-1,1} &\frac{i\omega}{c} \frac{(\varkappa-1)^2}{(2\varkappa-1)} \frac{\psi_{\varkappa-1}(kr_1)}{kr_1} - {}_{21}H_{\varkappa+1,1} \frac{i\omega}{c} \frac{(\varkappa+2)^2}{(2\varkappa+3)} \frac{\psi_{\varkappa+1}(kr_1)}{kr_1} . \end{aligned} \right.$$

Wenden wir in Gl. (49) die Beziehung:

$$\frac{\psi_\varkappa(kr)}{(kr)^2} = \frac{\psi_{\varkappa-1}(kr)}{kr} + \frac{\psi_{\varkappa+1}(kr)}{kr} \quad ^1)$$

an, so folgt

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} &{}_2\bar{E}_{11}\cdot k\left[\frac{\Psi_{\varkappa-1}(kR)}{kR} - \frac{\Psi_\varkappa(kR)}{(kR)^2}\right]\frac{\psi_{\varkappa-1}(kr_1)}{kr_1} \\ &\quad - {}_2\bar{E}_{11}\cdot k\left[\frac{\Psi_{\varkappa+1}(kR)}{kR} + \frac{\Psi_\varkappa(kR)}{(kR)^2}\right]\frac{\psi_{\varkappa+1}(kr_1)}{kr_1} \\ &= \left[{}_{21}\bar{E}_{\varkappa 1}\cdot k\frac{(\varkappa+1)}{(2\varkappa+1)} + {}_{21}H_{\varkappa-1,1}\frac{i\omega}{c}\frac{(\varkappa-1)^2}{(2\varkappa-1)}\right]\frac{\psi_{\varkappa-1}(kr_1)}{kr_1} \\ &\quad - \left[{}_{21}\bar{E}_{\varkappa 1}\cdot k\frac{\varkappa}{(2\varkappa+1)} + {}_{21}H_{\varkappa+1,1}\frac{i\omega}{c}\frac{(\varkappa+2)^2}{(2\varkappa+3)}\right]\frac{\psi_{\varkappa+1}(kr_1)}{kr_1}. \end{aligned}\right.$$

Wir können nun die Faktoren von $\frac{\psi_{\varkappa-1}(kr_1)}{kr_1}$ bzw. von $\frac{\psi_{\varkappa+1}(kr_1)}{kr_1}$ links und rechts einander gleichsetzen. Daß dies erlaubt ist, sieht man leicht ein, wenn man diese Zylinderfunktionen nach Potenzen von (kr_1) entwickelt und dann die Koeffizienten gleicher Potenzen links und rechts vergleicht. Dann folgt aus Gl. (50):

$$(51\,a)\quad \left\{\begin{aligned} &{}_{21}\bar{E}_{\varkappa 1}\cdot k\cdot\frac{(\varkappa+1)}{(2\varkappa+1)} + {}_{21}H_{\varkappa-1,1}\frac{i\omega}{c}\frac{(\varkappa-1)^2}{(2\varkappa-1)} \\ &\qquad = {}_2\bar{E}_{11}\cdot k\left[\frac{\Psi_{\varkappa-1}(kR)}{kR} - \frac{\Psi_\varkappa(kR)}{(kR)^2}\right], \end{aligned}\right.$$

$$(51\,b)\quad \left\{\begin{aligned} &{}_{21}\bar{E}_{\varkappa 1}\cdot k\frac{\varkappa}{(2\varkappa+1)} + {}_{21}H_{\varkappa+1,1}\frac{i\omega}{c}\frac{(\varkappa+2)^2}{(2\varkappa+3)} \\ &\qquad = {}_2\bar{E}_{11}\cdot k\left[\frac{\Psi_{\varkappa+1}(kR)}{kR} + \frac{\Psi_\varkappa(kR)}{(kR)^2}\right]. \end{aligned}\right.$$

Aus Gl. (47 b) ergibt sich in gleicher Weise:

$$(51\,c)\quad \left\{\begin{aligned} &{}_{21}E_{\varkappa 1}\cdot k\frac{(\varkappa+1)}{(2\varkappa+1)} - {}_{21}\bar{H}_{\varkappa-1,1}\frac{i\omega}{c}\cdot\frac{(\varkappa-1)^2}{(2\varkappa-1)} \\ &\qquad = {}_2E_{11}\cdot k\left[\frac{\Psi_{\varkappa-1}}{kR} - \frac{\Psi_\varkappa}{(kR)^2}\right], \end{aligned}\right.$$

$$(51\,d)\quad \left\{\begin{aligned} &{}_{21}E_{\varkappa 1}\cdot k\frac{\varkappa}{(2\varkappa+1)} - {}_{21}\bar{H}_{\varkappa+1,1}\frac{i\omega}{c}\frac{(\varkappa+1)^2}{(2\varkappa+3)} \\ &\qquad = {}_2E_{11}\cdot k\left[\frac{\Psi_{\varkappa+1}}{kR} + \frac{\Psi_\varkappa}{(kR)^2}\right]. \end{aligned}\right.$$

Damit haben wir Rekursionsformeln für die gesuchten Koeffizienten der Reihen (37) gewonnen, z. B. folgt aus Gl. (51 c) und (51 a):

---

1) E. Jahnke-Emde, Funktionentafeln, 1. Aufl. S. 165.

$$(52) \qquad {}_{21}E_{11} = \frac{3}{2}\left[\frac{\Psi_0(kR)}{kR} - \frac{\Psi_1(kR)}{(kR)^2}\right]{}_2E_{11},$$

$$(53) \qquad {}_{21}\bar{E}_{11} = \frac{3}{2}\left[\frac{\Psi_0(kR)}{kR} - \frac{\Psi_1(kR)}{(kR)^2}\right]{}_2\bar{E}_{11}.$$

Jedoch sind uns noch nicht alle Koeffizienten auf diese Weise zugänglich; z. B. erhalten wir aus den abgeleiteten Rekursionsformeln noch nicht den Koeffizienten ${}_2E_{10}$, sowie alle ${}_{21}E_{\varkappa 1}$ mit geraden $\varkappa$. Um auch Rekursionsformeln für die noch fehlenden Koeffizienten zu erhalten, ist noch Gl. (39b) auszuwerten. Wir setzen dazu die Reihen (36) und (37) in Gl. (39b) ein und erhalten:

$$(54) \quad \begin{cases} j\frac{\Psi_1(kr_2)}{kr_2}\Big[{}_2E_{10}\frac{\partial P_1(\cos\vartheta_2)}{\partial\vartheta_2} + \frac{\partial P_1^1(\cos\vartheta_2)}{\partial\vartheta_2} \\ \qquad \cdot({}_2E_{11}\cos\varphi + {}_2\bar{E}_{11}\sin\varphi)\Big] \\ = j\sum_{\nu,\mu}\frac{\psi_\nu(kr_1)}{kr_1}\frac{\partial P_\nu^\mu(\cos\vartheta_1)}{\partial\vartheta_1}[{}_{21}E_{\nu\mu}\cos\mu\varphi + {}_{21}\bar{E}_{\nu\mu}\sin\mu\varphi] \\ + \frac{k}{\sin\vartheta_1}\sum_{\nu,\mu}\left\{\frac{\psi_{\nu-1}(kr_1)}{kr_1} - \nu\frac{\psi_\nu(kr_1)}{(kr_1)^2}\right\} \\ \qquad \cdot P_\nu^\mu(\cos\vartheta_1)\left[{}_{21}\bar{H}_{\nu\mu}\mu\cos\mu\varphi - {}_{21}H_{\nu\mu}\cdot\mu\sin\mu\varphi\right]. \end{cases}$$

Da

$$\frac{\partial P_1(\cos\vartheta_2)}{\partial\vartheta_2} = \frac{\partial\cos\vartheta_2}{\partial\vartheta_2} = -\sin\vartheta_2 = -P_1^1(\cos\vartheta_2),$$

$$\frac{\partial P_1^1(\cos\vartheta_2)}{\partial\vartheta_2} = \frac{\partial\sin\vartheta_2}{\partial\vartheta_2} = \cos\vartheta_2 = P_1(\cos\vartheta_2)$$

wird wegen Gl. (34) und (35):

$$(55a) \quad \begin{cases} \frac{\Psi_1(kr_2)}{kr_2}\frac{\partial P_1(\cos\vartheta_2)}{\partial\vartheta_2} = -\frac{\Psi_1(kr_2)}{kr_2}P_1^1(\cos\vartheta_2) \\ \qquad = -\sum_\nu(2\nu+3)\frac{\Psi_{\nu+1}(kR)}{(kR)^2}\frac{\psi_{\nu+1}(kr_1)}{kr_1}P_{\nu+1}^1(\cos\vartheta_1), \end{cases}$$

$$(55b) \quad \begin{cases} \frac{\Psi_1(kr_2)}{kr_2}\frac{\partial P_1^1(\cos\vartheta_2)}{\partial\vartheta_2} = \frac{\Psi_1(kr_2)}{kr_2}P_1(\cos\vartheta_2) \\ \qquad = \sum_\nu\left\{-\frac{\Psi_{\nu+1}(kR)}{kR} + \nu\frac{\Psi_\nu(kR)}{(kR)^2}\right\}\frac{\psi_\nu(kr_1)}{kr_1}\left\{\frac{P_{\nu+1}^1 - P_{\nu-1}^1}{\sin\vartheta_1}\right\}. \end{cases}$$

Setzen wir (55a) und (55b) in Gl. (54) ein und vergleichen wir die Koeffizienten von $\cos 0\varphi$, so ergibt sich:

$$(56) \quad \begin{cases} -j\,{}_2E_{10}\sum_\nu(2\nu+3)\frac{\Psi_{\nu+1}(kR)}{(kR)^2}\frac{\psi_{\nu+1}(kr_1)}{kr_1}P_{\nu+1}^1(\cos\vartheta_1) \\ = j\sum_\nu{}_{21}E_{\nu 0}\frac{\psi_\nu(kr_1)}{kr_1}\frac{\partial P_\nu(\cos\vartheta_1)}{\partial\vartheta_1}. \end{cases}$$

Berücksichtigen wir, daß $\frac{\partial P_\nu(\cos\vartheta_1)}{\partial\cos\vartheta_1}(-\sin\vartheta_1) = \frac{\partial P_\nu}{\partial\vartheta_1} = -P_\nu^1(\cos\vartheta_1)$ ist, und vergleichen wir dann die Koeffizienten von $P_\varkappa^1(\cos\vartheta_1)$, so ergibt sich aus Gl. (56):

$$(57)\qquad {}_{21}E_{\varkappa 0} = (2\varkappa+1)\frac{\Psi_\varkappa(kR)}{(kR)^2}\,{}_2E_{10},$$

und insbesondere

$$(57a)\qquad {}_{21}E_{10} = 3\,\frac{\Psi_1(kR)}{(kR)^2}\,{}_2E_{10}.$$

Vergleichen wir in Gl. (54) auch die Faktoren von $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, so erhalten wir Rekursionsformeln für die Koeffizienten ${}_{21}E_{\varkappa 1}$, ${}_{21}H_{\varkappa 1}$ mit geradem $\varkappa$. Wie sich ergeben wird, kommen wir aber mit den bereits berechneten Koeffizienten aus.

Setzen wir (52), (53) und (57a) in Gl. (37) ein, so ergibt sich:

$$(58)\qquad \left\{\begin{aligned} \Pi^E_{21} = \frac{1}{k}\cdot\frac{\psi_1(kr_1)}{kr_1}\Big[&3\,\frac{\Psi_1(kR)}{(kR)^2}\,P_1(\cos\vartheta_1)\cdot{}_2E_{10}\\ &+P_1^1(\cos\vartheta_1)\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{\Psi_0(kR)}{kR}-\frac{\Psi_1(kR)}{(kR)^2}\right)\\ &\qquad\cdot({}_2E_{11}\cos\varphi+{}_2\bar{E}_{11}\sin\varphi)\Big]\\ &+\sum_{\nu>1}\frac{\psi_\nu(kr_1)}{kr_1}\,P_\nu^\mu(\cos\vartheta_1)({}_{21}E_{\nu\mu}\cos\mu\varphi+{}_{21}\bar{E}_{\nu\mu}\sin\mu\varphi); \end{aligned}\right.$$

ähnliches gilt für Π^H_{21}.

Damit sind wir jetzt in der Lage, das Streufeld eines Teilchens $\mathfrak{K}_2$ von dem Mittelpunkt eines anderen Teilchens $\mathfrak{K}_1$ aus zu beschreiben. Zunächst war dazu noch die vereinfachende Annahme nötig, daß die Polarkoordinatensysteme beider Teilchen in der Achse und der Halbebene $\varphi = 0$ übereinstimmen. Falls es sich nun um mehr als zwei Teilchen handelt, ist diese Voraussetzung nicht mehr von vornherein für je zwei Teilchen zu erfüllen. Dann wird man praktisch anfangs die Polarachsen sämtlicher Teilchen parallel zueinander annehmen. Betrachten wir nun zwei Teilchen mit nicht zusammenfallenden, aber parallelen Achsen, so werden wir zunächst durch Drehungen um die Koordinatenanfangspunkte die Polarachsen zur Deckung bringen. Dann können wir wie vorher die oben dargestellte Parallelverschiebung ausführen und schließlich durch die zur ersten Drehung inverse den Achsen ihre ursprüngliche Lage wiedergeben. Dabei ist zu bemerken, daß die Anwendung von Drehungen um den Koordinatenanfangspunkt auf die elektromagnetischen Felder keine besonderen mathematischen Schwierigkeiten bereitet. Bei diesen Drehungen bleiben nämlich die Potentiale Π^E und Π^H im Gegensatz zu der obigen Parallelverschiebung ihrem

Wert nach erhalten. Anderenfalls würden nach Gl. (1) auch die Feldstärkekomponenten in Richtung $r : \mathfrak{E}r$ und $\mathfrak{H}r$ ihren Wert ändern. Das ist jedoch nicht der Fall; daher sind in Π^E und Π^H lediglich die ϑ, φ enthaltenden Kugelflächenfunktionen der Drehung zu unterziehen, wenn man die Potentiale des Feldes nach der Drehung sucht. Bei Drehungen gehen die Kugelflächenfunktionen eines bestimmten Grades in eine Summe solcher Funktionen desselben Grades über. Ferner ist die Ausführung der Drehung an Π^E und Π^H deshalb besonders einfach, da bei uns nur die Glieder für $n = 1 : \cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\sin\vartheta\sin\varphi$ Bedeutung haben.

§ 5. Die Streuintensität eines Teilchens bei Berücksichtigung eines nahen Nachbarteilchens

Um einen Eindruck darüber zu gewinnen, in welcher Weise die Streuung eines kolloidalen Teilchens im Felde einer ebenen Welle durch die Anwesenheit eines sehr nahe benachbarten zweiten Teilchens abgeändert wird, soll zunächst der Fall untersucht werden, daß die ebene Welle senkrecht zur Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der beiden Teilchen einfällt. In diesem Falle stimmen die Koeffizienten der Streupotentiale beider Teilchen überein. Nehmen wir wieder an, daß die Koordinatensysteme beider Teilchen in den Achsen und in der Halbebene $\varphi = 0$ übereinstimmen, so können wir setzen:

$$(59\,a)\quad \begin{cases} \Pi_1^E = \dfrac{1}{k}\,\dfrac{\Psi_1(kr_1)}{kr_1}\,[E_{10}P_1(\cos\vartheta_1) + P_1^1(\cos\vartheta_1) \\ \qquad\qquad \cdot(E_{11}\cos\varphi + \bar{E}_{11}\sin\varphi)], \\ \Pi_1^H = 0; \end{cases}$$

$$(59\,b)\quad \begin{cases} \Pi_2^E = \dfrac{1}{k}\,\dfrac{\Psi_1(kr_2)}{kr_2}\,[E_{10}P_1(\cos\vartheta_2) + P_1^1(\cos\vartheta_2) \\ \qquad\qquad \cdot(E_{11}\cos\varphi + \bar{E}_{11}\sin\varphi)], \\ \Pi_2^H = 0. \end{cases}$$

Aus Gl. (59b) folgt nach § 4, daß das Streufeld des Teilchens $\mathfrak{K}_2$ in Koordinaten r_1, ϑ_1, φ gegeben ist durch:

$$(60)\quad \begin{cases} \Pi_{21}^E = \dfrac{1}{k}\,\dfrac{\psi_1(kr_1)}{kr_1}\,[E_{10}F_0(R)P_1(\cos\vartheta_1) + F_1(R)P_1^1(\cos\vartheta_1) \\ \qquad\qquad \cdot(E_{11}(\cos\varphi + \bar{E}_{11}\sin\varphi)] \\ \quad + \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{\nu>1}\dfrac{\psi_\nu(kr_1)}{kr_1}\,P_\nu^\mu(\cos\vartheta_1)(E^*_{\nu\mu}\cos\mu\varphi + \bar{E}^*_{\nu\mu}\sin\mu\varphi), \end{cases}$$

mit

$$F_0(R) = \frac{3}{2}\,\frac{\Psi_0(kR)}{(kR)^2} \text{ und } F_1(R) = \frac{3}{2}\left[\frac{\Psi_0(kR)}{(kR)} - \frac{\Psi_1(kR)}{(kR)^2}\right].$$

Eine ebene Welle, die in der Richtung der umgekehrten Polarachse fortschreitet und in der Ebene $\varphi = 0$ polarisiert ist, ist gegeben durch die Potentiale:

$$(61)\quad \begin{cases} \Pi^E = \frac{1}{k} \sum_{\nu=1}^{\infty} i^{\nu-1} \frac{(2\nu+1)}{\nu(\nu+1)} \frac{\psi_\nu(kr_1)}{kr_1} P_\nu^1(\cos\vartheta_1)\cos\varphi\,, \\ \Pi^H = \frac{1}{k} \sum_{\nu=1}^{\infty} i^{\nu-1} \frac{(2\nu+1)}{\nu(\nu+1)} \frac{\psi_\nu(kr_1)}{kr_1} P_\nu^1(\cos\vartheta_1)\sin\varphi\,. \end{cases}$$

Durch die Drehung

$$\begin{aligned} \cos\vartheta_1 &= \sin\vartheta_1'\sin\varphi' \\ \sin\vartheta_1\sin\varphi &= \cos\vartheta_1' \\ \sin\vartheta_1\cos\varphi &= \sin\vartheta_1'\cos\varphi' \end{aligned}$$

erhalten wir daraus die Potentiale einer ebenen Welle, wie wir sie brauchen, welche fortschreitet in der Richtung $\vartheta_1 = 90^0$, $\varphi = 270^0$, also senkrecht zur Verbindungslinie der Teilchen, und polarisiert ist in der Richtung $\vartheta = 90^0$, $\varphi = 0$. Somit ergibt sich für die gesuchte ebene Welle (unter Weglassung des Strichs an ϑ_1 und φ):

$$(62)\quad \begin{cases} \Pi^E = \frac{1}{k}\cdot\frac{3}{2}\frac{\psi_1(kr_1)}{(kr_1)} P_1^1(\cos\vartheta_1)\cos\varphi \\ \qquad + \frac{1}{k}\sum_{\nu>1} i^{\nu-1}\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}\frac{\psi_\nu(kr_1)}{kr_1} C_\nu(\vartheta,\varphi)\,. \end{cases}$$

Aus Gl. (60) und (62) ergibt sich für das bei $\mathfrak{K}_1$ einfallende Feld

$$(63)\quad \begin{cases} \Pi^e = \frac{1}{k}\frac{\psi_1(kr_1)}{kr_1}\Big[E_{10}\cdot F_0(R) P_1(\cos\vartheta_1) \\ \qquad + \Big(E_{11}F_1(R) + \frac{3}{2}\Big) P_1^1(\cos\vartheta_1)\cos\varphi \\ \qquad + \bar{E}_{11}F_1(R) P_1^1(\cos\vartheta_1)\sin\varphi\Big] \\ \quad + \frac{1}{k}\sum_{\nu>1}\frac{\psi_\nu(kr_1)}{kr_1} C^*_{\nu\mu}(\vartheta_1,\varphi). \end{cases}$$

Das durch dieses einfallende Feld verursachte Streufeld von $\mathfrak{K}_1$ ist gegeben durch die Potentiale der Gl. (59a). Die Koeffizienten in (59a) und (63) sind verknüpft durch die elektromagnetischen Grenzbedingungen [Gl. (10)] an der Oberfläche von $\mathfrak{K}_1$. Sie liefern:

$$(64a)\qquad E_{10} = C_1 F_0 E_{10}\,; \qquad E_{10} = 0\,.$$

$$(64b)\qquad E_{11} = C_1(F_1\cdot E_{11} + \tfrac{3}{2})\,.$$

$$(64c)\qquad \bar{E}_{11} = C_1 F_1 \bar{E}_{11}\,; \qquad \bar{E}_{11} = 0\,.$$

Damit ist in unserem speziellen Falle nur E_{11}, der Koeffizient von $\frac{\Psi_1(k r_1)}{k r_1} P_1^1(\cos\vartheta_1)\cos\varphi$ des Streupotentials von Null verschieden. Aus (64b) folgt:

$$E_{11} = \frac{3}{2} C_1 \frac{1}{1 - C_1 \cdot F_1}. \tag{65}$$

$\frac{3}{2} C_1$ ist der Betrag, der sich ohne Berücksichtigung der Wechselwirkung der Teilchen ergeben würde. Die Wechselwirkung bedingt, daß er durch den Faktor $\frac{1}{1 - C_1 F_1}$ abgeändert wird. Mit wachsendem Teilchenabstand R gehen die beiden Summanden von $F_1(R)$: $\frac{\Psi_0(k R)}{k R}$, $\frac{\Psi_1(k R)}{(k R)^2}$ sehr schnell gegen Null und der Änderungsfaktor damit gegen 1.

Die Streuintensität des von einem Teilchen gestreuten Lichtes ist im wesentlichen gegeben durch das Quadrat des absoluten Betrages von E_{11}: $|E_{11}|^2$. Daher kommt für die Abänderung der Intensität durch die Berücksichtigung der Wechselwirkung der Teilchen der Faktor

$$\frac{1}{|D|^2} = \frac{1}{|1 - C_1 F_1|^2} \tag{66}$$

in Frage.

Nach Mie[1]) ist

$$C_1 = -\tfrac{2}{3} \alpha^3 (\mathfrak{a}'' + i\,\mathfrak{a}'), \tag{66a}$$

wobei $\alpha = k \cdot a$ (a Kugelradius) und $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'' + i\,\mathfrak{a}'$ eine Funktion des komplexen Brechungsindex ist, deren Werte für verschiedene Wellenlängen für Gold in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind.

Tabelle 1

$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'' + i\,\mathfrak{a}'$ für Gold

λ in $m\mu$	420	450	500	525	550	600	650
$\mathfrak{a}''$	0,615	0,666	1,18	1,44	1,211	0,391	0,180
$\mathfrak{a}'$	0,579	0,602	0,807	1,33	1,925	1,88	1,545
$\lvert\mathfrak{a}\rvert^2$	0,790	0,805	2,05	3,84	5,18	3,70	2,42

Unter Berücksichtigung, daß

$$\frac{\Psi_0(x)}{x} = \frac{\sin x}{x} - i\,\frac{\cos x}{x},$$

$$\frac{\Psi_1(x)}{x^2} = \left(\frac{\sin x}{x^3} - \frac{\cos x}{x^2}\right) - i\left(\frac{\cos x}{x^3} + \frac{\sin x}{x^2}\right)$$

ist, folgt

$$F_1(x) = \tfrac{3}{2}[f_1(x) + i f_2(x)] \tag{66b}$$

1) G. Mie, Ann. d. Phys. **25**. S. 377. 1908.

mit

$$f_1(x) = \frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3},$$

$$f_2(x) = -\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} + \frac{\cos x}{x^3}.$$

Der Verlauf dieser Funktionen ist dargestellt in der folgenden Tab. 2 und Fig. 2.

Tabelle 2

$x^3 f_1(x)$, $x^3 f_2(x)$

x	$x^3 f_1(x)$	$x^3 f_2(x)$	x	$x^3 f_1(x)$	$x^3 f_2(x)$
0,01	0,000002	0,99995	1	0,5373	0,8434
0,02	0,0000033	0,99980	1,1	0,684	—
0,1	0,000665	0,995038	1,2	0.6604	1,0939
0,2	0,0046	0,98058	1,4	0,9473	1,4083
0,3	0,0167	0,95800	1,5	1,3554	1,4001
0,4	0,0300	0,92950	1,6	1,0891	1,923
0,5	0,0776	0,8980	1,8	1,3190	2,534
0,6	0,132	0,86726	2	1,8753	3,0948
0,7	0,2048	0,84155	2,2	1,7774	4,0528
0,8	0,2968	0,82553	2,4	1,4014	4,0429
0,9	0,4080	0,82440	3	−1,9302	8,3227

Setzen wir $k \cdot R = x$, $\alpha = k \cdot a = \left(\frac{a}{R}\right) \cdot x$, so folgt aus den Gl. (66), (66a) und (66b):

$$(67) \quad \begin{cases} |D|^2 = 1 + 2\left(\frac{a}{R}\right)^3 [x^3 f_1(x)\,\mathfrak{a}'' - x^3 f_2(x)\,\mathfrak{a}'] \\ \qquad + \left(\frac{a}{R}\right)^6 x^6 (f_1^2 + f_2^2)\,|\mathfrak{a}|^2. \end{cases}$$

Nehmen wir wie vorher die Teilchen sehr klein an, so können wir nach Tab. 2 $x^3 f_1(x) \approx 0$, $x^3 f_2(x) \approx 1$ setzen und erhalten:

$$(67a) \qquad |D|^2 = 1 - 2\left(\frac{a}{R}\right)^3 \mathfrak{a}' + \left(\frac{a}{R}\right)^6 |\mathfrak{a}|^2.$$

$|D|^2$ wird dann besonders stark von 1 abweichen, wenn die Teilchen so nahe wie möglich zusammenrücken, sich also fast berühren. Dann kann das Verhältnis von Teilchenradius zu Teilchenabstand $\frac{a}{R} \approx \frac{1}{2}$ gesetzt werden. Für diesen Fall zeigt die folgende Fig. 3 die Abhängigkeit des Änderungsfaktors $\frac{1}{|D|^2}$ von der Wellenlänge λ. Die Kurve J stellt die Intensität der Streuung eines einzelnen Teilchens in Abhängigkeit von der Wellenlänge nach den Mieschen Ergebnissen dar. Die Kurve I zeigt den Faktor $\frac{1}{|D|^2}$, mit dem die Mie sche Intensität zu multiplizieren ist, um daraus die Streuintensität eines Teilchens unter Berücksichtigung des Einflusses des anderen Teilchens zu erhalten. Die Darstellung zeigt eine ausgesprochene Bevorzugung des röteren Lichtes. Die für die

einzelnen Wellenlängen berechneten Werte des Zusatzfaktors lassen ein ziemlich hohes Maximum zwischen $\lambda = 0{,}55\ \mu$ und $\lambda = 0{,}6\ \mu$ erwarten, wo die Miesche Intensität bereits abfällt. Leider sind dazwischen die Materialwerte α' und α'' nicht bekannt, so daß der genaue Wert des Maximums nicht berechnet werden konnte.

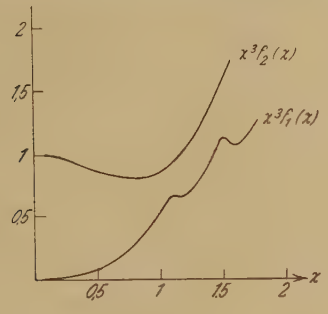

Fig. 2

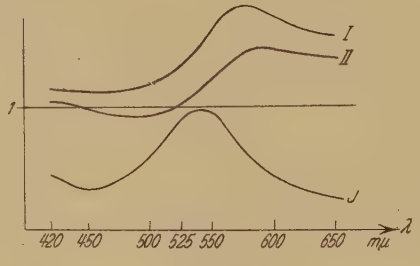

Fig. 3

Aus Gl. (67a) geht hervor, daß der Zusatzfaktor sehr rasch gegen 1 geht, wenn das Verhältnis (a/R) kleiner wird, wenn also der Teilchenabstand wächst. Bei der Verdoppelung von R sinkt $(|D|^2 - 1)$ etwa auf den achten Teil seines Wertes. Die Überhöhung des Zusatzfaktors über 1 nimmt dann noch stärker ab.

Mit wachsendem Teilchenradius a bei konstantem (a/R) wird zwar der Zusatzfaktor für alle Wellenlängen etwas kleiner (da ja mit a auch R wächst, wenn die Teilchen sich fast berühren), aber die Begünstigung des roten Lichtes ist noch ausgesprochener. Kurve *II* der Fig. 3 stellt den Zusatzfaktor als Funktion der Wellenlänge dar für den Fall, daß der Teilchendurchmesser $2a = 0{,}5\ \mu$, also ungefähr gleich der Wellenlänge ist, wobei nur der Teil der Streuung berücksichtigt ist, der den Gliedern für $n = 1$ in den Potentialen entspricht, die sogenannte Rayleighsche Strahlung. Die letzte Einschränkung entspricht zwar nicht der Wirklichkeit, doch zeigt die Darstellung in Kurve *II*, wie mit wachsendem Teilchenradius der Zusatzfaktor des roten Lichtes immer stärker vor dem des blauen hervortritt. Er ist für $\lambda = 0{,}500\ \mu$ sogar kleiner als 1. In der folgenden Tab. 3 sind die Werte aufgezeichnet, die den Kurven *I* und *II* in Fig. 3 zugrunde liegen:

Tabelle 3

λ		420	450	500	525	550	600	650
$\frac{1}{\lvert D\rvert^2}$ für	$a < 0{,}1\ \mu$ . . .	1,15	1,16	1,20	1,35	1,67	1,72	1,56
	$2a = 0{,}5\ \mu$ . . .	1,04	1	0,97	1,03	1,25	1,45	1,4

Betrachten wir nun anschließend noch den entgegengesetzten Spezialfall, daß die ebene, einfallende Welle in der Richtung der Verbindungslinie beider Teilchen, also in Richtung der gemeinsamen Polarachse fortschreitet. In Polarkoordinaten r_1, ϑ_1, φ gilt dann für die Potentiale dieser ebenen Welle:

$$(68)\quad \Pi^E(r_1,\vartheta_1,\varphi)=\frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{\infty} i^{\nu-1}\frac{(2\nu+1)}{\nu(\nu+1)}\frac{\psi_\nu(kr_1)}{(kr_1)}P_\nu^1(\cos\vartheta_1)\cos\varphi,$$

und in Polarkoordinaten r_2,ϑ_2,φ:

$$(69)\quad \Pi^E(r_2,\vartheta_2,\varphi)=\frac{1}{k}e^{ikR}\sum_{\nu=1}^{\infty} i^{\nu-1}\frac{(2\nu+1)}{\nu(\nu+1)}\frac{\psi_\nu(kr_2)}{(kr_2)}P_\nu^1(\cos\vartheta_2)\cos\varphi,$$

wie man leicht erkennt, wenn man auf den Hertzschen Vektor zurückgeht. Die Streupotentiale beider Teilchen können wir in diesem Fall jetzt nicht gleich annehmen, sondern es ist zu setzen:

$$(70a)\quad \begin{cases} \Pi_1^E(r_1,\vartheta_1,\varphi)=\dfrac{1}{k}\dfrac{\Psi_1(kr_1)}{kr_1}\big[{}_1E_{10}P_1(\cos\vartheta_1) \\ \qquad\qquad +P_1{}^1(\cos\vartheta_1)({}_1E_{11}\cos\varphi+{}_1\bar{E}_{11}\sin\varphi)\big], \\ \Pi_1^H=0, \end{cases}$$

$$(70b)\quad \begin{cases} \Pi_2^E(r_2,\vartheta_2,\varphi)=\dfrac{1}{k}\dfrac{\Psi_1(kr_2)}{kr_2}\big[{}_2E_{10}P_1(\cos\vartheta_2) \\ \qquad\qquad +P_1{}^1(\cos\vartheta_2)({}_2E_{11}\cos\varphi+{}_2\bar{E}_{11}\sin\varphi)\big] \\ \Pi_2^H=0. \end{cases}$$

Die Ausführung der Parallelverschiebung nach § 4 ergibt aus (70b):

$$(71a)\quad \begin{cases} \Pi_{21}^E(r_1,\vartheta_1,\varphi)=\dfrac{1}{k}\dfrac{\psi_1(kr_1)}{kr_1}\big[{}_2E_{10}F_0(R)P_1(\cos\vartheta_1) \\ \quad +F_1(R)P_1{}^1(\cos\vartheta_1)\{{}_2E_{11}\cos\varphi+{}_2\bar{E}_{11}\sin\varphi\}\big] \\ \quad +\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{\nu>1}\frac{\psi_\nu(kr_1)}{kr_1}P_\nu^\mu(\cos\vartheta_1)\{{}_{21}E_{\nu\mu}\cos\mu\varphi+{}_{21}\bar{E}_{\nu\mu}\sin\mu\varphi\}, \end{cases}$$

und aus (70a):

$$(71b)\quad \begin{cases} \Pi_{12}^E(r_2,\vartheta_2,\varphi)=\dfrac{1}{k}\dfrac{\psi_1(kr_2)}{kr_2}\big[-{}_1E_{10}F_0(R)P_1(\cos\vartheta_2) \\ \quad +F_1(R)P_1{}^1(\cos\vartheta_2)\{{}_1E_{11}\cos\varphi+{}_1\bar{E}_{11}\sin\varphi\}\big] \\ \quad +\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{\nu>1}\frac{\psi_\nu(kr_2)}{kr_2}P_\nu^\mu(\cos\vartheta_2)\{{}_{12}E_{\nu\mu}\cos\mu\varphi+{}_{12}\bar{E}_{\nu\mu}\sin\mu\varphi\}. \end{cases}$$

Aus Gl. (68) und Gl. (71a) ergibt sich das elektrische Potential des bei $\mathfrak{R}_1$ einfallenden Feldes zu:

$$(72a)\quad \begin{cases} \Pi_1^e = \frac{1}{k}\frac{\psi_1(kr_1)}{kr_1}\Big[{}_2E_{10}F_0(R)P_1(\cos\vartheta_1) \\ \quad + P_1{}^1(\cos\vartheta_1)\Big\{\Big(F_1(R)\,{}_2E_{11}+\frac{3}{2}\Big)\cos\varphi + F_1(R)\,{}_2\bar{E}_{11}\sin\varphi\Big\}\Big] \\ \quad + \frac{1}{k}\sum_{\nu>1}\frac{\psi_\nu(kr_1)}{kr_1}C^*_{\nu\mu}(\vartheta_1\varphi). \end{cases}$$

Aus Gl. (69) und Gl. (71b) ergibt sich für das bei $\mathfrak{K}_2$ einfallende Feld:

$$(72b)\quad \begin{cases} \Pi_2^e = \frac{1}{k}\frac{\psi_1(kr_2)}{kr_2}\Big[-{}_1E_{10}F_0(R)P_1(\cos\vartheta_2) \\ \quad + P_1{}^1(\cos\vartheta_2)\Big\{\Big(F_1(R)\,{}_1E_{11}+\frac{3}{2}e^{ikR}\Big)\cos\varphi + F_1(R)\,{}_1\bar{E}_{11}\sin\varphi\Big\}\Big] \\ \quad + \frac{1}{k}\sum_{\nu>1}\frac{\psi_\nu(kr_2)}{kr_2}C^{**}_{\nu\mu}(\vartheta_2\varphi). \end{cases}$$

Die Koeffizienten des Streupotentials von $\mathfrak{K}_1$ [Gl. (70a)] sind mit denen der Reihe (72a) durch die elektromagnetischen Grenzbedingungen [Gl. (10)] an der Oberfläche von $\mathfrak{K}_1$ verknüpft:

$$(73a)\quad {}_1E_{10} = C_1\cdot{}_2E_{10}\cdot F_0(R),$$

$$(73b)\quad {}_1E_{11} = C_1\cdot\Big(F_1(R)\cdot{}_2E_{11}+\tfrac{3}{2}\Big),$$

$$(73c)\quad {}_1\bar{E}_{11} = C_1\cdot F_1(R)\cdot{}_2\bar{E}_{11}.$$

Die Koeffizienten des Streupotentials von $\mathfrak{K}_2$ [Gl. (70b)] sind mit denen der Reihe (72b) durch die Grenzbedingungen an der Oberfläche von $\mathfrak{K}_2$ verknüpft:

$$(74a)\quad {}_2E_{10} = -C_1\cdot{}_1E_{10}\cdot F_0(R),$$

$$(74b)\quad {}_2E_{11} = C_1\Big(F_1(R)\,{}_1E_{11}+\tfrac{3}{2}e^{ikR}\Big),$$

$$(74c)\quad {}_2\bar{E}_{11} = C_1F_1(R)\,{}_1\bar{E}_{11}.$$

Aus (73a) und (74a) folgt ${}_1E_{10} = {}_2E_{10} = 0$,
aus (73c) und (74c) folgt ${}_1\bar{E}_{11} = {}_2\bar{E}_{11} = 0$,
aus (73b) und (74b) folgt schließlich:

$$(75)\quad {}_1E_{11} = \frac{3}{2}C_1\frac{1+C_1F_1(R)e^{ikR}}{1-(C_1F_1(R))^2},$$

$$(76)\quad {}_2E_{11} = \frac{3}{2}C_1\frac{e^{ikR}+C_1F_1(R)}{1-[C_1F_1(R)]^2}.$$

Dieses Ergebnis ist nicht wesentlich von dem des vorigen Spezialfalls verschieden. Wieder sind in den Streupotentialen nur die Koeffizienten von $\frac{\psi_1(kr_{\frac{1}{2}})}{kr_{\frac{1}{2}}}P_1^1(\cos\vartheta_{\frac{1}{2}})\cos\varphi$ von Null verschieden. Für großen Teilchenabstand R werden die Zusatzfaktoren in beiden Fällen gleich 1, so daß der entsprechende Miesche Koeffizient $\frac{3}{2}C_1$ stehen bleibt. Für den Fall, daß die Teilchen sehr klein sind und sehr nahe aneinanderrücken, kann $e^{ikR}\approx 1$ gesetzt werden, und dann gehen unsere beiden neuen Zusatzfaktoren in

$$\frac{1+C_1F_1}{1-[C_1F_1]^2} = \frac{1}{1-C_1F_1}$$

über. Das ist aber genau derselbe Ausdruck, den wir auch im ersten Spezialfall erhielten [Gl. (65)]. Daher ist anzunehmen, daß bei sehr kleinen Kugeln und Teilchenabständen der Zusatzfaktor für die Streuintensität des einzelnen Teilchens nicht wesentlich von der Lage des Nachbarteilchens abhängen wird.

Für den Fall, daß mehr als zwei (N) Teilchen betrachtet werden, daß also die Grenzbedingungen an mehreren Kugeloberflächen zu erfüllen sind, haben wir dann 3 Systeme von N Gleichungen mit je N Unbekannten zu lösen, ebenso wie wir in unserem letzten Fall 3 Systeme von je 2 Gleichungen mit zwei Unbekannten zu lösen hatten. Zunächst sind die Streupotentiale jedes Teilchens mit unbestimmten Koeffizienten in den Koordinaten des jeweiligen Teilchens anzusetzen, und dann sind sie nach § 4 in die Potentiale in den Koordinaten jedes anderen Teilchens umzurechnen. Die oben genannten Gleichungensysteme ergeben sich aus den Grenzbedingungen an der Oberfläche der N Teilchen. Die Anzahl N der Unbekannten wird dabei nicht allzugroß werden, weil die Vielfachstreuung mit wachsendem Teilchenabstand sehr schnell vernachlässigt werden kann, so daß immer nur verhältnismäßig wenige Nachbarteilchen Einfluß auf ein bestimmtes Teilchen ausüben. Prinzipiell bildet also die Behandlung des allgemeinen Falles von N Teilchen keine Schwierigkeiten mehr. Rechnerisch besonders einfach werden sich folgende zwei Spezialfälle erweisen: 1. unendlich viele Teilchen in gleichen Abständen auf einer Geraden; senkrecht zu dieser Geraden schreitet die einfallende, ebene Welle fort; 2. unendlich viele Teilchen in gleichen Abständen in einer Ebene, senkrecht zu welcher die ebene Welle fortschreitet. Dann können, wie in unserem ersten Fall, sämtliche Streupotentiale gleich angesetzt werden. Vermutlich wird sich auch dann, wie in den von uns erledigten Fällen, eine Verstärkung der Streuintensität des roten Lichtes ergeben.

Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit gab Herr Dr. Möglich. Hierfür, sowie für das ständige Interesse, das er dem Fortschreiten der Arbeit entgegenbrachte, möchte ich ihm meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Lebenslauf

In Muskau in der Oberlausitz wurde ich am 14. November 1910 geboren. Nachdem ich an der Städtischen Mittelschule meiner Heimatstadt das Zeugnis der mittleren Reife erworben hatte, wollten mich meine Eltern den Beruf meines Vaters, das Ofensetzhandwerk, erlernen lassen. Da ich jedoch eine ausgesprochene Neigung für Mathematik und Naturwissenschaften zeigte, schickten sie mich auf Rat meiner Lehrer an die Oberrealschule nach Görlitz. Dort bestand ich Ostern 1929 das Abitur und kam nun nach Berlin, um hier Mathematik, Physik und Chemie zu studieren. Nach einem Jahr wurde ich in die Studienstiftung des Deutschen Volkes aufgenommen. Im Juni 1933 legte ich die Staatsprüfung für das Lehramt an höheren Schulen ab. Anschließend war ich als Studienreferendar bis Herbst 1934 am Kaiser-Friedrich-Realgymnasium in Neukölln und bis jetzt am Friedenauer Gymnasium tätig. Da ich besondere Neigung zur Theoretischen Physik habe, erhielt ich nach dem Staatsexamen von Herrn Dr. Möglich im Einvernehmen mit Herrn Professor von Laue eine Aufgabe über die Vielfachstreuung an kleinen Kugeln. Vor kurzem konnte ich diese Arbeit beenden.

Mein Berufsziel ist das Lehramt an der Höheren Schule und der Hochschule.

Berlin, den 7. Januar 1935.

Walter Trinks
Studienreferendar

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig 43/35